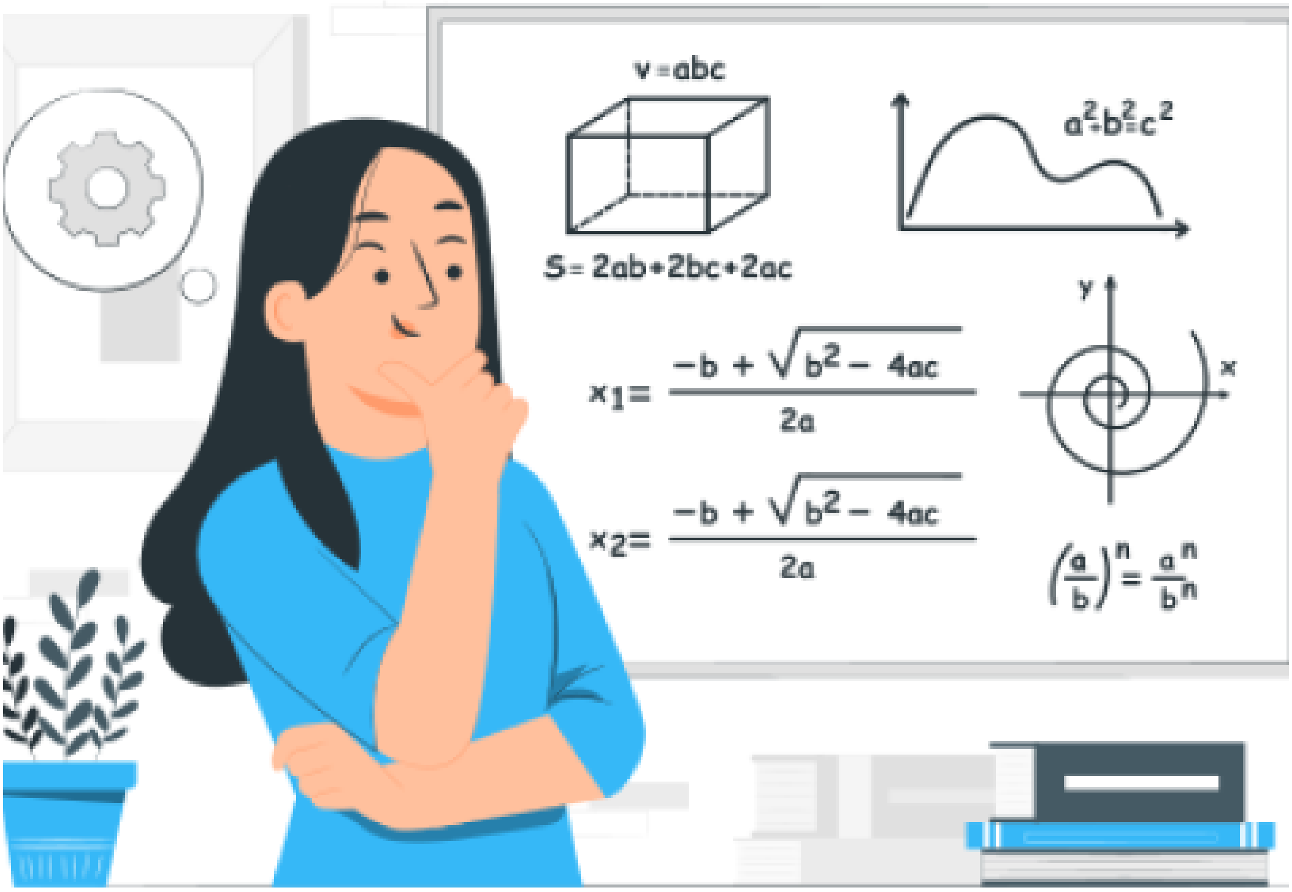



# Concursul de matematică Upper.School
# Ediția 2022

## Etapa II
## Clasa a VII-a

## - Soluții -
Lioara Ivanovici

# §1 Soluții

**Problema 1**

Fie numerele întregi $a$, $b$, $c$ astfel încât $a < b < 0$ și $(a-b)(a-c) < 0$. Care este valoarea expresiei $A = \dfrac{32 \cdot (|a-b| + |b-c| + |c-a|)}{|b(1-c) - c(1-b)|}$?

*Demonstrație.* $a < b \implies a - b < 0$, dar $(a-b)(a-c) < 0 \implies a - c > 0$. Ordinea numerelor este $c < a < b < 0$.

- $a < b \implies |a-b| = b - a;$
- $c < b \implies |b-c| = b - c;$
- $c < a \implies |c-a| = a - c.$

Rezultă că $32\,(|a-b| + |b-c| + |c-a|) = 32 \cdot 2(b-c)$.
Pe de alta parte, avem:

$$b(1-c) - c(1-b) = b - c \implies |b(1-c) - c(1-b)| = b - c.$$

Obținem:

$$A = \frac{32 \cdot (|a-b| + |b-c| + |c-a|)}{|b(1-c) - c(1-b)|} = \frac{64(b-c)}{b-c} = \boxed{64}.$$

**Răspuns corect:** $\boxed{64}$ ........................................................................ $5p$

□

**Problema 2**

Care este numărul de trei cifre $\overline{abc}$ pentru care $\sqrt{\overline{aabb}} = \overline{cc}$?

*Demonstrație.* Ridicam la pătrat ecuația și obținem $\overline{aabb} = (\overline{cc})^2 \iff \overline{aa} \cdot 100 + \overline{bb} = (\overline{cc})^2 \iff 11 \cdot \overline{a00} + 11 \cdot b = 11^2 \cdot c^2 \iff \overline{a0b} = 11 \cdot c^2$, de unde avem că pătratul lui $c$ este un număr de două cifre cu suma cifrelor divizibilă cu 10, iar singurul pătrat perfect de două cifre care verifică acest lucru este $64 = 8^2$. Obținem astfel $\overline{abc} = \boxed{748}$.

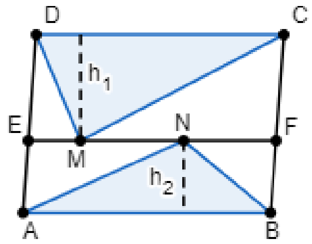
**Răspuns corect:** $\boxed{748}$ ........................................................................ $5p$

□

**Problema 3**

$ABCD$ este un paralelogram, iar $M$ și $N$ sunt două puncte în interiorul paralelogramului astfel încât $MN \parallel AB$. Suma ariilor triunghiurilor $\triangle ABN$ și $\triangle CDM$ este egală cu 18 cm$^2$. Care este aria paralelogramului $ABCD$?

*Demonstrație.* Notăm cu $E$, respectiv $F$ intersecția dreptei $MN$ cu laturile $AD$, respectiv $BC$. Știm că $DE \parallel CF$ și $EF \parallel AB \implies DEFC$ este paralelogram. Notăm cu $h_1$ distanța dintre dreptele $DC$ și $EF$. Atunci $\mathcal{A}_{MDC} = \dfrac{h_1 \cdot DC}{2} = \dfrac{\mathcal{A}_{DEFC}}{2}$. Analog obținem $\mathcal{A}_{NAB} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABFE}}{2}$.
În final, $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{DEFC} + \mathcal{A}_{ABFE} = 2 \cdot (\mathcal{A}_{MDC} + \mathcal{A}_{NAB}) = \boxed{36}$ cm$^2$.




**Răspuns corect:** $\boxed{36}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5$p$

□

**Problema 4**

La un concurs s-au înscris inițial 19 băieți și 11 fete. Trebuie să se formeze 8 echipe astfel încât fiecare echipă să aibă același număr de persoane și în fiecare echipă să fie număr egal de fete și băieți. Care este numărul minim de fete și băieți care ar trebui să se mai înscrie la concurs pentru a se putea forma echipele?

*Demonstrație.* Pentru a fi număr egal de fete și băieți în fiecare echipă trebuie să se mai înscrie cel puțin 8 fete, astfel încât numărul de fete să fie egal cu numărul de băieți. Copiii se împart în 8 echipe egale, deci numărul de copii trebuie să fie divizibil cu 8. Dar 38 nu este divizibil cu 8. Următorul multiplu al lui 8 în ordine crescătoare este 40, dar nici acesta nu convine pentru că echipele ar fi formate din câte 5 copii, care este număr impar și numărul de băieți nu poate fi egal cu numărul de fete. Următorul multiplu al lui 8 este 48, iar în fiecare echipă vor putea fi 3 fete și 3 băieți. Prin urmare, numărul minim de fete și băieți care ar trebui să fie înscriși la concurs pentru a se putea forma cele 8 echipe este 48 și este necesar să se mai înscrie minim $\boxed{18}$ copii.

**Răspuns corect:** $\boxed{18}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5$p$

□

**Problema 5**

Un tren de călători este compus din 5 vagoane. În fiecare vagon se află cel puțin un călător. Spunem despre doi călători că sunt vecini dacă sunt în același vagon sau în vagoane vecine. Fiecare călător are 5 sau 10 vecini. Câți călători sunt în tren?

*Demonstrație.* Vom nota cu $a$, $b$, $c$, $d$, respectiv $e$ numărul de călători din vagoanele 1, 2, 3, 4, respectiv 5. Pentru că în fiecare vagon se află cel puțin un călător obținem că fiecare dintre cele 5 numere este nenul. Un călător din primul vagon are $a+b-1$ vecini, iar un călător din al doilea vagon are $a+b+c-1$ vecini. Cum $a+b+c-1 > a+b-1 \implies a+b-1=5$ și $a+b+c-1=10$. Continuăm raționamentul și obținem $d+e-1=5$. Numărătorul călătorilor din tren este $a+b+c+d+e=\boxed{17}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{17}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5$p$

□

**Problema 6**

Probabilitatea ca, alegând un număr natural de șapte cifre, acesta să fie egal cu răsturnatul său este egală cu $\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, $(a, b) = 1$. Valoarea absolută a diferenței acestor două numere este egală cu:

*Demonstrație.* Fie numărul $\overline{abcdcba} \implies a \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$, $b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, ..., 9\} \implies$ sunt $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ cazuri favorabile și $9999999 - 999999 = 9000000$ cazuri posibile. Probabilitatea este egală cu $\mathcal{P} = \dfrac{cazuri\ favorabile}{cazuri\ posibile} = \dfrac{9000}{9000000} = \dfrac{1}{1000} \implies a = 1$ și $b = 1000$. Valoarea absolută a diferenței lor este egală cu $|a - b| = |1 - 1000| = \boxed{999}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{999}$ ........................................................................ $5p$

□

## Problema 7

Care este valoarea minimă a expresiei

$$E(x) = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2} + ... + \sqrt{(x-2022)^2},$$

unde $x$ este număr real?

*Demonstrație.* Vom aplica inegalitatea $|x| + |y| \geq |x + y|$ .

$$E(x) = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2} + ... + \sqrt{(x-2022)^2} \iff$$

$$|x - 1| + |x - 2| + ... + |x - 2021| + |x - 2022| \geq$$

$$|x - 1 + 2022 - x| + |x - 2 + 2021 - x| + ... + |x - 1011 + 1012 - x| =$$

$$= 2021 + 2019 + .... + 1 = \frac{2022 \cdot 1011}{2} = 1022121.$$

Să ne asigurăm că această valoare poate fi atinsă. Egalitatea în inegalitatea modulelor se obține atunci când numerele pentru care o aplicăm au același semn, în cazul nostru când $1011 \leq x \leq 1012$. Pentru $x = 1011$, de exemplu, se obține cea mai mică valoare a expresiei, care este $\boxed{1022121}$.

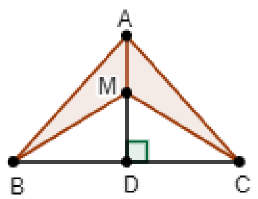
**Răspuns corect:** $\boxed{1022121}$ ................................................................ $5p$

□

## Problema 8

În triunghiul $ABC$ considerăm înălțimea $AD$, $D \in (BC)$. Punctul $M \in (AD)$, astfel încât $AM = 2$ cm, iar $BC = 8$ cm. Care este valoarea sumei $\mathcal{A}_{ABM} + \mathcal{A}_{ACM}$?
Am notat cu $\mathcal{A}_{ABC}$ aria triunghiului $\triangle ABC$.

*Demonstrație.* $\mathcal{A}_{ABM} + \mathcal{A}_{ACM} = \dfrac{AM \cdot BD}{2} + \dfrac{AM \cdot CD}{2} = \dfrac{AM \cdot (BD + DC)}{2} = \dfrac{AM \cdot BC}{2} = \dfrac{2 \cdot 8}{2} = \boxed{8}$ cm$^2$.




**Răspuns corect:** $\boxed{8}$ ........................................................................ $5p$

□

**Problema 9**

În pătratul $ABCD$ de latură 10 cm se consideră punctele $M \in (AB)$, $N \in (AD)$ și $P \in (DC)$, astfel încât $AM = 2$ cm, $AN = 3$ cm și $\mathcal{A}_{MNP} = 16$ cm$^2$. Care este lungimea segmentului $(PC)$?

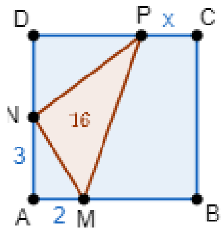
*Demonstrație.* Vom nota cu $x$ lungimea segmentului $(PC)$.

$$\mathcal{A}_{MNP} = \mathcal{A}_{ABCD} - (\mathcal{A}_{AMN} + \mathcal{A}_{DNP} + \mathcal{A}_{PCBM}) \iff$$

$$16 = AB^2 - \left(\frac{AM \cdot AN}{2} + \frac{DP \cdot DN}{2} + \frac{(PC + BM) \cdot BC}{2}\right) \iff$$

$$16 = 100 - \left(\frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{(10 - x) \cdot 7}{2} + \frac{(x + 8) \cdot 10}{2}\right)$$

Se obține soluția $PC = \boxed{4}$ cm.




**Răspuns corect:** $\boxed{4}$ ........................................................................ $5p$

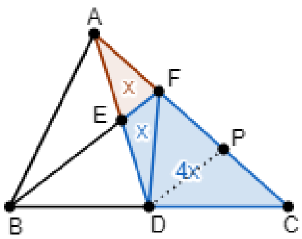
□

**Problema 10**

În triunghiul $\triangle ABC$ punctul $D$ este mijlocul lui $(BC)$, punctul $E$ este mijlocul lui $(AD)$ și $\{F\} = BE \cap AC$. Raportul de arii $\dfrac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DCFE}}$ este egal cu fracția ireductibilă $\dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $(a, b) = 1$. Valoarea sumei $a + b$ este egală cu:

*Demonstrație.* Vom demonstra că $\dfrac{AF}{FC} = \dfrac{1}{2}$. Pentru aceasta considerăm punctul $P$ mijlocul segmentului $(FC)$. În triunghiul $\triangle BCF$ segmentul $(DP)$ este linie mijlocie $\Longrightarrow$ $DP \parallel EF$. Dar și $(AE) \equiv (ED) \Longrightarrow (EF)$ este linie mijlocie în $\triangle ADP \Longrightarrow (AF) \equiv (FP) \equiv (PC)$. Știm că mediana împarte un triunghi în două suprafețe echivalente. În $\triangle AFD$ știm că $(FE)$ este mediană, de unde $\mathcal{A}_{AFE} = \mathcal{A}_{DFE} = x$.

Notăm cu $h$ distanța de la $D$ la dreapta $AC$. Atunci $\dfrac{\mathcal{A}_{DAF}}{\mathcal{A}_{DFC}} = \dfrac{\frac{AF \cdot h}{2}}{\frac{CF \cdot h}{2}} = \dfrac{AF}{CF} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow$ $\mathcal{A}_{DFC} = 4x$. De aici obținem $\mathcal{A}_{ADC} = \mathcal{A}_{DAF} + \mathcal{A}_{DFC} = 6x$. În $\triangle ABC$ segmentul $(AD)$ este mediană și obținem $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ACD} \Longrightarrow \mathcal{A}_{ABC} = 12x$ și $\mathcal{A}_{DCFE} = 5x$. Fracția $\dfrac{a}{b}$ este egală cu $\dfrac{12}{5}$, iar valoarea sumei $a + b = \boxed{17}$.




**Răspuns corect:** $\boxed{17}$ ........................................................................ $5p$

□

## Problema 11

Fie $a$, $b$, $c$ numere raționale pozitive, astfel încât $\dfrac{5}{a+7}+\dfrac{35}{7b+77}+\dfrac{65}{13c+169}=0,(5)$. Care este valoarea expresiei $3\cdot\left(\dfrac{a+4}{a+7}+\dfrac{b+8}{b+11}+\dfrac{c+10}{c+13}\right)$?

*Demonstrație.* Avem:

$$\frac{5}{a+7}+\frac{35}{7b+77}+\frac{65}{13c+169}=\frac{5}{9} \iff$$
$$\frac{5}{a+7}+\frac{35}{7(b+11)}+\frac{65}{13(c+13)}=\frac{5}{9} \iff$$
$$\frac{5}{a+7}+\frac{5}{b+11}+\frac{5}{c+13}=\frac{5}{9} \iff$$
$$\frac{1}{a+7}+\frac{1}{b+11}+\frac{1}{c+13}=\frac{1}{9}.$$

Pe de altă parte,

$$\frac{a+4}{a+7}+\frac{b+8}{b+11}+\frac{c+10}{c+13}=$$
$$=\frac{a+7}{a+7}-\frac{3}{a+7}+\frac{b+11}{b+11}-\frac{3}{b+11}+\frac{c+13}{c+13}-\frac{3}{c+13}=$$
$$=3-3\cdot\left(\frac{1}{a+7}+\frac{1}{b+11}+\frac{1}{c+13}\right)=3-3\cdot\frac{1}{9}=\frac{8}{3}.$$

Valoarea expresiei $3\cdot\left(\dfrac{a+4}{a+7}+\dfrac{b+8}{b+11}+\dfrac{c+10}{c+13}\right)$ este egală cu $3\cdot\dfrac{8}{3}=\boxed{8}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{8}$ ........................................................................ $5p$

□

## Problema 12

Pe un cerc sunt 11 numere naturale astfel încât suma oricăror 3 numere vecine este cel mult 19, iar suma oricăror 4 numere vecine este cel puțin 25. Suma celor 11 numere este egală cu:

*Demonstrație.* Fie $x_1, x_2, ..., x_{11}$ cele 11 numere date, iar $S$ suma lor. Avem că $x_1+x_2+x_3\leq 19$, $x_2+x_3+x_4\leq 19, ..., x_{10}+x_{11}+x_1\leq 19$, $x_{11}+x_1+x_2\leq 19$, de unde, prin însumare, obținem $3S\leq 11\cdot 19$. Cum $S$ este număr natural, deducem că $S\leq 69$. Apoi, $x_1+x_2+x_3+x_4\geq 25$, $x_2+x_3+x_4+x_5\geq 25, ..., x_{10}+x_{11}+x_1+x_2\geq 25$, $x_{11}+x_1+x_2+x_3\geq 25$, care, adunate, conduc la $4S\geq 11\cdot 25$, prin urmare $S\geq 69$. În concluzie, suma celor 11 numere este egală cu $\boxed{69}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{69}$ ........................................................................ $5p$

□

**Problema 13**

Laturile pătratului $ABCD$ sunt împărțite de punctele $M$, $N$, $P$ și $Q$ în rapoartele $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$, $\frac{BN}{CN} = \frac{1}{2}$, $\frac{CP}{PD} = \frac{1}{2}$ si $\frac{DQ}{QA} = \frac{1}{2}$, iar $T$ este un punct situat în interiorul pătratului. Știm că $TNCP$ este dreptunghi. Se știe că aria patrulaterului $BMTN$ este 24 cm$^2$. Care este aria patrulaterului $AMTQ$?

*Demonstrație.* Vom nota cu $t_1 = \mathcal{A}_{TPCN}$, $t_2 = \mathcal{A}_{TPDQ}$, $t_3 = \mathcal{A}_{AMTQ}$, $t_4 = \mathcal{A}_{BNTM}$ și cu $x$ lungimea segmentelor $(BN)$, $(CP)$, $(DQ)$ și $(AM)$. $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{CN} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA} = \frac{1}{2} \implies MB = CN = DP = AQ = 2x$.

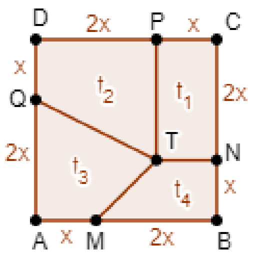
Patrulaterul $MBNT$ este trapez dreptunghic și aria lui este $t_4 = \frac{BN \cdot (MB + NT)}{2} = \frac{x \cdot (x + 2x)}{2} \iff 48 = 3x^2 \iff x^2 = 16$.

Aria dreptunghiului $CNTP$ se exprimă astfel $t_1 = PC \cdot CN = 2x^2 = 2 \cdot 16 = 32$.

$DPTQ$ este trapez dreptunghic, de unde $t_2 = \frac{DP \cdot (PT + DQ)}{2} = \frac{2x \cdot (x + 2x)}{2} = \frac{6x^2}{2} = 48$.

$\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 9x^2 = 144$.

În final, $t_3 = \mathcal{A}_{ABCD} - t_1 - t_2 - t_4 = 144 - 32 - 48 - 24 = \boxed{40}$ cm$^2$.




**Răspuns corect:** $\boxed{40}$ ........................................................................ $5p$

□

**Problema 14**

Care este dublul sumei tuturor fracțiilor de forma $\frac{x}{y}$, unde $x, y \in \mathbb{N}^*$, și $x < y \leq 2022$?

*Demonstrație.* Pentru $x = 1 \implies y \in \{2, 3, 4, ..., 2022\}$ și avem fracțiile $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2022}$. Pentru $x = 2 \implies y \in \{3, 4, 5, ..., 2022\}$ și avem fracțiile $\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, ..., \frac{2}{2022}$. Ultima fracție care respectă regula este $\frac{2021}{2022}$. Grupăm fracțiile care au același numitor și obținem

$$S = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{2022} + \frac{2}{2022} + \frac{3}{2022} + ... + \frac{2021}{2022}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4} + \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 5} + ... + \frac{2021 \cdot 2022}{2 \cdot 2022} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + ... + \frac{2021}{2} = \frac{2021 \cdot 2022}{2 \cdot 2} = \frac{1011 \cdot 2021}{2}.$$

Dublul sumei cerute este $\boxed{2043231}$.

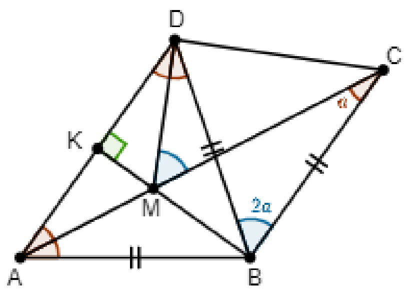
**Răspuns corect:** $\boxed{2043231}$ ........................................................ $5p$

□

## Problema 15

În patrulaterul $ABCD$ știm că $AD \parallel BC$, $AB = BC = BD$. Fie $BK \perp AD$, $K \in AD$ și $BK \cap AC = \{M\}$. Determinați măsura unghiului $\angle CDM$.

*Demonstrație.* Din $AD \parallel BC \implies m(\angle BCA) = m(\angle CAD) = a$. Apoi, $BA = BC \implies \triangle BAC$ este isoscel și $m(\angle BAC) = m(\angle BCA) = a \implies m(\angle BAD) = 2a$.
Triunghiul $\triangle BAD$ este isoscel pentru că $AB = BD \implies m(\angle BDA) = m(\angle BAD) = 2a$.
Din $BC \parallel AD \implies m(\angle CBD) = m(\angle ADB) = 2a$ **(1)** (alterne interne).
În triunghiul isoscel de bază $(AD)$, înălțimea $BK$ este și mediatoarea segmentului $(AD)$, $M \in BK \implies M$ este egal depărtat de extremitățile segmentului, adică $\triangle MAD$ este isoscel de bază $(AD)$ și $m(\angle MAD) = m(\angle MDA) = a$. Unghiul $\angle CMD$ este unghi exterior triunghiului $\triangle AMD$ și, aplicând teorema unghiului exterior rezultă $m(\angle CMD) = 2 \cdot m(\angle MAD) = 2a$. **(2)**
Din **(1)** și **(2)** obținem $\angle CBD \equiv \angle CMD \implies$ patrulaterul $CBMD$ este inscriptibil, deci suma măsurilor unghiurilor opuse este de $180° \implies m(\angle CBM) + m(\angle CDM) = 180°$. Dar $BC \parallel AD$, $BK \perp AD \implies BK \perp BC \implies m(\angle MBC) = 90°$ și de aici obținem $m(\angle CDM) = \boxed{90°}$.




**Răspuns corect:** $\boxed{90}$ ........................................................ $5p$

□

## Problema 16

Se consideră opt puncte pe un cerc care îl împart în opt arce de cerc congruente. Se colorează cu roșu $n$ dintre aceste puncte, $n \leq 8$. Care este cea mai mică valoare a lui $n$ astfel încât, oricum s-ar face această colorare, să existe un triunghi isoscel cu toate vârfurile roșii?

*Demonstrație.* Numerotăm punctele în ordine, de la 1 la 8. Cazul $n = 4$ nu convine; dacă se colorează cu roșu vârfurile 1, 2, 4 și 5, nu se formează un triunghi isoscel cu vârfurile roșii. În cazul $n = 5$, aplicăm metoda reducerii la absurd și presupunem că se pot colora cinci puncte cu roșu fără să se formeze triunghiuri isoscele cu toate vârfurile roșii. Dacă 1 este roșu, atunci din perechile $(2, 8)$, $(3, 7)$, $(4, 6)$ cel mult un punct este roșu și atunci, pentru a avea 5 puncte roșii, și vârful 5 este tot roșu. Dar 3 nu poate fi roșu (triunghiul 135 ar fi isoscel) și 7 nu poate fi roșu (triunghiul 175 ar fi isoscel). Contradicția obținută finalizează demonstrația. Soluția problemei este $n = \boxed{5}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{5}$ ........................................................ $5p$

□

**Problemele 1-16:** ........ $16 \times 5p = 80p$
**Puncte acordate din oficiu:** ........ $20p$
**Total:** ........ $100p$

**Timp de lucru:** ........ 3 ore