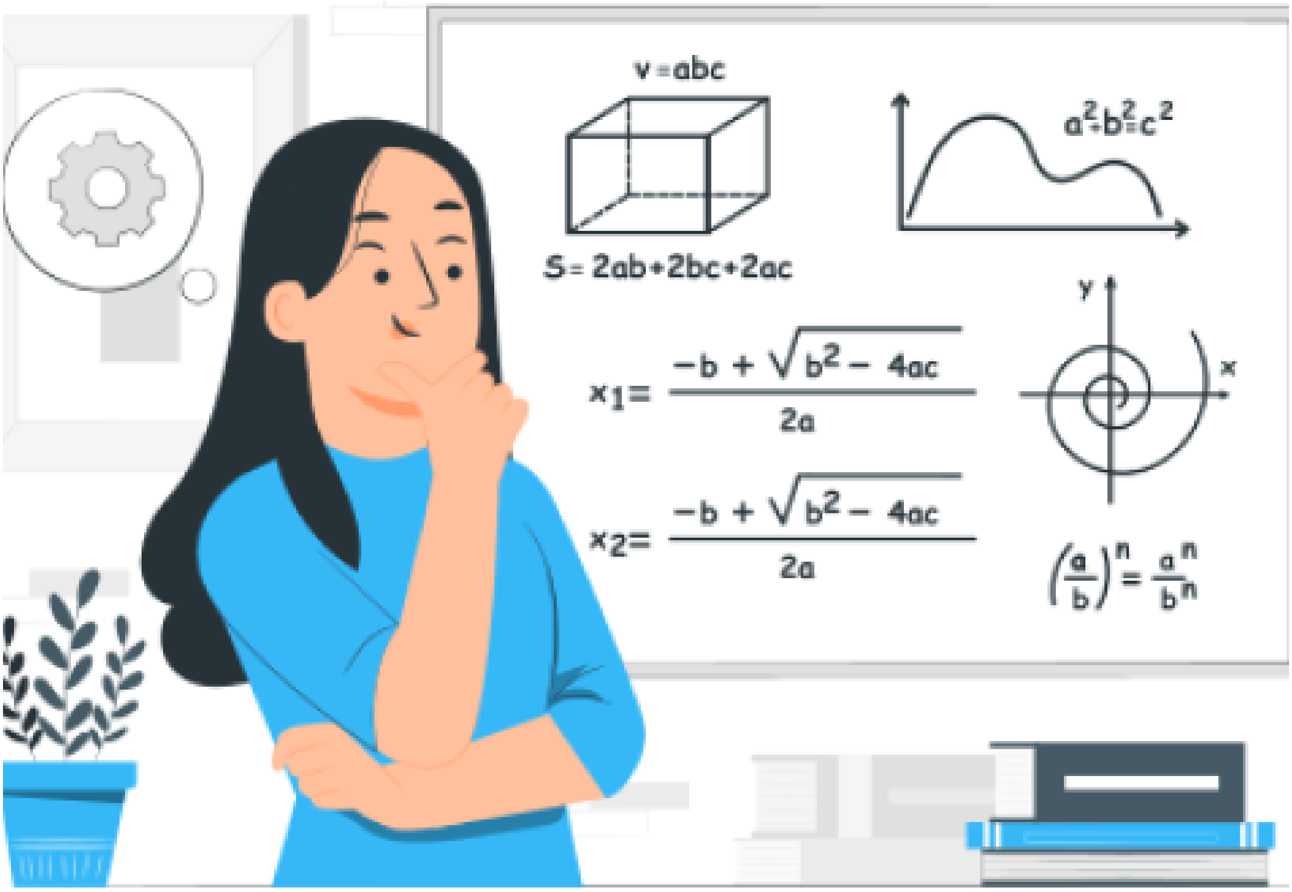


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022

Etapa II
Clasa a VIII-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Care este soluția reală pozitivă a ecuației

$$\frac{x^2+9}{x}+\frac{x^2+15}{x+1}+\frac{x^2+21}{x+2}+....+\frac{x^2+2019}{x+335}=2016?$$

Mihaela Berindeanu

Demonstrație. În partea stângă a ecuației este o sumă de 336 termeni:

$$\frac{x^2+9}{x}+\frac{x^2+15}{x+1}+\frac{x^2+21}{x+2}+....+\frac{x^2+2019}{x+335}=336\cdot 6 \iff$$

$$\frac{x^2+9-6x}{x}+\frac{x^2+15-6x-6}{x+1}+\frac{x^2+21-6x-12}{x+2}+....+\frac{x^2+2019-6x-6\cdot 335}{x+335}=0 \iff$$

$$(x-3)^2\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+...+\frac{1}{x+335}\right)=0$$

Pentru că $x>0$ obținem $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+...+\frac{1}{x+335}\neq 0$, prin urmare $(x-3)^2=0$, deci $x=\boxed{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{3}$ 5*p*

□

Problema 2

Fie $x,y\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)<0$ și $\left(y-\sqrt{5}\right)\left(y-\sqrt{10}\right)<0$. Care este valoarea expresiei $E(x,y)=|x-y|$?

Demonstrație.

- $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)<0 \iff x-\sqrt{2}<0$ și $x-\sqrt{5}>0$ sau $x-\sqrt{2}>0$ și $x-\sqrt{5}<0$. Primul caz este imposibil pentru că se obține $x<\sqrt{2}$ și $x>\sqrt{5}$, iar în al doilea caz avem $x\in(\sqrt{2},\sqrt{5})\cap\mathbb{Z}=\{2\}$.
- La fel, $\left(y-\sqrt{5}\right)\left(y-\sqrt{10}\right)<0 \iff y-\sqrt{5}<0$ și $y-\sqrt{10}>0$ sau $y-\sqrt{5}>0$ și $y-\sqrt{10}<0$. Primul caz nu oferă soluții și în al doilea $y\in(\sqrt{5},\sqrt{10})\cap\mathbb{Z}=\{3\}$.

Valoarea cerută este $E(2,3)=|2-3|=\boxed{1}$.

Răspuns corect: $\boxed{1}$ 5*p*

□

Problema 3

Să se determine cifra n din numărul $x=\overline{1,n12}$, care este soluție a ecuației

$$2\langle x\rangle+x=\overline{2,488}$$

unde cu $\langle x\rangle$ se notează distanța de la x la cel mai apropiat număr întreg față de x.

Demonstrație. $\langle x\rangle = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor \iff 0 \leq \{x\} < \dfrac{1}{2} \\ \lfloor x \rfloor + 1 - x \iff \dfrac{1}{2} \leq \{x\} < 1 \end{cases}$

- Cazul $I : 0 \leq \{x\} < \dfrac{1}{2}$.
  $2 \cdot (\overline{1,n12} - 1) + \overline{1,n12} = 2,488 \iff 3 \cdot \overline{1,n12} = 4,488 \iff \overline{1,n12} = 1,496$, care nu convine.

- Cazul al $II-$lea: $\dfrac{1}{2} \leq \{x\} < 1$.
  $2 \cdot (2 - \overline{1,n12}) + \overline{1,n12} = 2,488 \iff 4 - 2,488 = \overline{1,n12} \iff \overline{1,n12} = 1,512 \implies n = \boxed{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{5}$ .... $5p$

□

Problema 4

Câte numere reale x sunt soluții ale inecuației $3 \geq |4x^2 - 1| + |4x - 5|$?

Demonstrație.

$$3 \geq \left|4x^2 - 1\right| + |4x - 5| = \left|4x^2 - 1\right| + |5 - 4x| \geq$$
$$\geq \left|4x^2 - 1 + 5 - 4x\right| = \left|4x^2 - 4x + 1 + 3\right| = \left|(2x - 1)^2 + 3\right| \geq 3$$

Prin urmare, obținem $|(2x - 1)^2 + 3| = 3$ cu soluția unică $x = \dfrac{1}{2}$ care verifică inegalitatea inițială. Numărul de soluții reale al inegalității este $\boxed{1}$.

Răspuns corect: $\boxed{1}$ .... $5p$

□

Problema 5

Câte numere naturale de 6 cifre au proprietatea că fiecare cifră din scrierea sa în baza 10 apare de atâtea ori cât este valoarea sa?

Demonstrație. Avem următoarele cazuri:

- Numărul este format din șase cifre de 6. În acest caz numărul 666666 este singura variantă;
- Numărul este format din cinci cifre de 5 și o cifră de 1. Cum cifra 1 poate ocupa șase locuri diferite vom avea 6 variante în acest caz;
- Numărul este format din patru cifre de 4 și două cifre de 2. Putem plasa două cifre de 2 în 15 moduri diferite. Așadar, vom avea 15 variante în acest caz;
- Numărul este format din trei cifre de 3, două cifre de 2 și o cifră de 1. Cum cifra 1 poate ocupa șase locuri diferite vom avea 6 posibilități pentru cifra 1. Pentru fiecare variantă de poziționare a cifrei 1 vom putea plasa două cifre de 2 în cele cinci poziții rămase în 10 moduri diferite. Aplicând regula produsului vom avea $6 \cdot 10 = 60$ variante în acest caz.

Deci putem găsi un total de $1 + 6 + 15 + 60 = \boxed{82}$ astfel de numere.

Răspuns corect: $\boxed{82}$ .... $5p$

□

Problema 6

Care este soluția reală a ecuației

$$\left\lfloor -x + \frac{2022}{120} \right\rfloor^2 + x - 6\sqrt{x-7} = -2?$$

Am notat prin $\lfloor x \rfloor$ partea întreagă a numărului real x.

Demonstrație.

$$\left\lfloor -x + \frac{2022}{120} \right\rfloor^2 + x - 6\sqrt{x-7} = -2 \iff$$
$$\left\lfloor -x + \frac{2022}{120} \right\rfloor^2 + x - 7 - 6\sqrt{x-7} + 9 = 0 \iff$$
$$\left\lfloor -x + \frac{2022}{120} \right\rfloor^2 + \left(\sqrt{x-7} - 3\right)^2 = 0 \iff$$
$$\left\lfloor -x + \frac{2022}{120} \right\rfloor^2 = 0, \left(\sqrt{x-7} - 3\right)^2 = 0.$$

Din a doua ecuație obținem soluția $x = 16$, care verifică și prima ecuație pentru că $\left\lfloor -16 + \frac{2022}{120} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{102}{120} \right\rfloor = 0$. Ecuația are soluția unică egală cu $x = \boxed{16}$.

Răspuns corect: $\boxed{16}$ .... $5p$

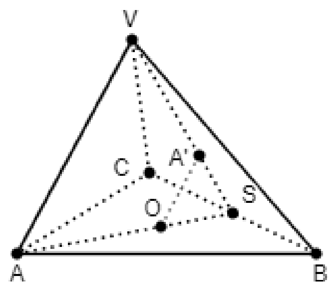
□

Problema 7

Fie $VABC$ o piramidă cu baza $\triangle ABC$ triunghi echilateral, iar O este centrul cercului circumscris bazei. Paralelele prin O la VA, VB, VC intersectează fețele opuse în A', B', respectiv C'. Valoarea sumei $S = \frac{OA'}{VA} + \frac{OB'}{VB} + \frac{OC'}{VC}$ este egală cu:

Demonstrație. Fie $\{S\} = AO \cap BC$. În $\triangle VAS$ fie $OA' \parallel VA$, $A' \in VS$. Din teorema fundamentală a asemănării obținem $\triangle SOA' \sim \triangle SVA$, de unde $\frac{SO}{SA} = \frac{OA'}{VA}$. **(1)**

Punctul O, centrul triunghiului echilateral $\triangle ABC$ este și centrul de greutate, de unde rezultă că $\frac{SO}{SA} = \frac{1}{3}$ și din **(1)** obținem $\frac{OA'}{VA} = \frac{1}{3}$. Analog obținem și $\frac{OB'}{VB} = \frac{1}{3}$ și $\frac{OC'}{VC} = \frac{1}{3}$, de unde $S = \frac{OA'}{VA} + \frac{OB'}{VB} + \frac{OC'}{VC} = \boxed{1}$.



Răspuns corect: $\boxed{1}$ .... $5p$

□

Problema 8

Determinați numărul natural prim p pentru care $16p + 1$ este cubul unui număr întreg pozitiv.

Demonstrație. $16p + 1 = k^3 \iff 16p = (k-1)(k^2+k+1) \iff$ Observăm că numărul k^2+k+1 este număr impar, de unde $k - 1 = 16 \iff k = 17$ și $p = 17^2 + 17 + 1 = \boxed{307}$.

Răspuns corect: $\boxed{307}$ .... $5p$

□

Problema 9

Prin schimbarea ordinii cifrelor unui număr natural de două cifre, pătratul acestuia crește cu 495 față de pătratul numărului inițial. Care este acest număr?

Demonstrație. Vom nota cu $\overline{ab}$ numărul inițial.
$\left(\overline{ba}\right)^2 - \left(\overline{ab}\right)^2 = 495 \iff \left(\overline{ba} - \overline{ab}\right)\left(\overline{ba} + \overline{ab}\right) = 495 \iff (9b - 9a)(11a + 11b) = 495 \iff (b-a)(a+b) = 5 \implies b - a = 1$ și $a + b = 5 \implies a = 2$ și $b = 3$.
Numărul căutat este $\boxed{23}$.

Răspuns corect: $\boxed{23}$ .... $5p$

□

Problema 10

Care este valoarea maximă a expresiei

$$E(x,y) = x + y + xy - x^2 - y^2,$$

unde $x, y \in \mathbb{R}$?

Demonstrație. Expresia se rescrie astfel:
$E(x,y) = x+y+xy-x^2-y^2 = \dfrac{2x+2y+2xy-2x^2-2y^2}{2} = \dfrac{-(x-y)^2-(x-1)^2-(y-1)^2}{2} + 1 \leq 1$. Pentru $x - y = 0$, $x - 1 = 0$ și $y - 1 = 0$, adică pentru $x = y = 1$ se obține valoarea maximă și aceasta este $\boxed{1}$.

Răspuns corect: $\boxed{1}$ .... $5p$

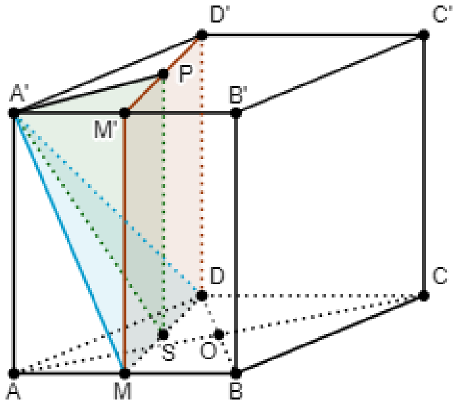
□

Problema 11

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AA' = 12$ cm, $AB = 6$ cm și $BC = 4$ cm. Vom nota cu M mijlocul muchiei (AB). Care este valoarea cotangentei unghiului determinat de planele $(A'DM)$ și $(D'DM)$?

Demonstrație. Fie M' mijlocul segmentului $(A'B')$. Cum $MM' \parallel DD' \implies$ punctele D, D' M si M' sunt coplanare și $D'DMM'$ este dreptunghi.
Fie $A'P \perp D'M'$, $P \in D'M'$. Cum $DD' \perp (A'B'D')$, $A'P \subset (A'B'D') \implies DD' \perp A'P$. Dar $A'P \perp D'M'$, $DD' \subset (DD'M)$, $D'M' \subset (DD'M)$, $DD' \cap D'M' = \{D'\} \implies A'P \perp (D'DM)$. Fie $PS \perp DM$, $S \in DM$. Din teorema celor 3 perpendiculare rezultă că $A'S \perp DM$. Pentru

că $PS \perp DM$, $A'S \perp DM$, $PS \subset (D'DM)$, $A'S \subset (A'DM)$, $A'S \cap PS = \{S\} \implies \angle((A'DM),(D'DM)) = \angle PSA'$. Vom calcula ctg acestui unghi în $\triangle A'PS$ care este dreptunghic în P pentru că $A'P \perp (D'DM)$ și $PS \subset (D'DM)$. În $\triangle A'D'M'$, care este triunghi dreptunghic calculăm înălțimea corespunzătoare ipotenuzei $A'P = \dfrac{c_1 \cdot c_2}{ip} = \dfrac{A'D' \cdot A'M'}{D'M'} = \dfrac{12}{5}$. Știm că $(PS) \equiv (DD') \implies PS = 12$ și $\text{ctg}(\angle PSA') = \dfrac{PS}{A'P} = \dfrac{12}{\frac{12}{5}} = \boxed{5}$.



Răspuns corect: $\boxed{5}$ .... $5p$

□

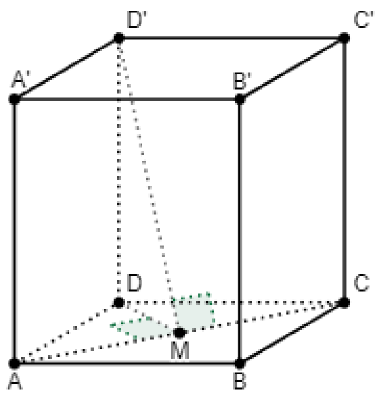
Problema 12

Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Care este valoarea numărului real x pentru care are loc egalitatea

$$\mathcal{A}^2_{D'AC} = x \cdot \left(\mathcal{A}^2_{D'AD} + \mathcal{A}^2_{D'CD} + \mathcal{A}^2_{DAC}\right)?$$

Am notat cu $\mathcal{A}_{ABC}$ aria triunghiului $\triangle ABC$.

Demonstrație. Problema este o binecunoscută proprietate a tetraedrului tridreptunghic.
Vom nota cu $a = AD$, $b = DC$ și $c = DD'$. Vom exprima cele patru arii în funcție de dimensiunile paralelipipedului. Pentru asta avem nevoie de înălțimea din D' a triunghiului $\triangle D'AC$.
$D'D \perp DA$, $D'D \perp DC$, $DA, DC \subset (DAC)$, $DA \cap DC = \{D\} \implies DA \perp (DAC)$. Aplicăm teorema celor 3 perpendiculare astfel: $DD' \perp (DAC)$, construim $DM \perp AC$, $M \in AC$, $DM, AC \subset (DAC) \implies D'M \perp AC$. În $\triangle DAC$ segmentul (DM) este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei, de unde $DM = \dfrac{DA \cdot DC}{AC} = \dfrac{a \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. În $\triangle D'DM$ aplicăm teorema lui Pitagora, de unde obținem $D'M^2 = D'D^2 + DM^2 = c^2 + \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2} = \dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}$.
$\mathcal{A}^2_{D'AC} = \dfrac{D'M^2 \cdot AC^2}{4} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2} \cdot (a^2+b^2) = \dfrac{1}{4} \cdot (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$. **(1)**
Pe de altă parte, $\mathcal{A}^2_{D'AD} + \mathcal{A}^2_{D'CD} + \mathcal{A}^2_{DAC} = \dfrac{DD'^2 \cdot DA^2}{4} + \dfrac{DD'^2 \cdot DC^2}{4} + \dfrac{DA^2 \cdot DC^2}{4} =$
$= \dfrac{a^2c^2}{4} + \dfrac{b^2c^2}{4} + \dfrac{a^2b^2}{4}$. **(2)**
Din **(1)** și **(2)** obținem $\mathcal{A}^2_{D'AC} = \mathcal{A}^2_{D'AD} + \mathcal{A}^2_{D'CD} + \mathcal{A}^2_{DAC}$, așadar $x = \boxed{1}$.



Răspuns corect: $\boxed{1}$ .... $5p$

□

Problema 13

Pentru câte valori reale ale numărului a, care aparține intervalului $(1, 9)$, numărul $a - \frac{1}{a}$ este număr întreg?

Demonstrație. Vom nota $k = a - \frac{1}{a} = \frac{a^2 - 1}{a}$, $k \in \mathbb{Z}^*$ pentru că $a \neq \pm 1$. Numărul a este soluție a ecuației de gradul al II-lea $a^2 - ka - 1 = 0$, care are soluții reale pentru că $\Delta = k^2 + 4 > 0$. Soluțiile convenabile pentru a sunt doar cele de forma $a = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$ pentru că a este pozitiv.
$1 < a < 9 \iff 1 < \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} < 9 \iff 2 < k + \sqrt{k^2 + 4} < 18.$

- Această dublă inegalitate se verifică pentru $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
- Pentru $k \geq 9 \implies k + \sqrt{k^2 + 4} \geq 9 + \sqrt{85} > 18$.
- Pentru $k \leq 0$ vom demonstra că are loc $k + \sqrt{k^2 + 4} \leq 2$, așadar nu mai găsim și alte soluții. Într-adevăr, $k + \sqrt{k^2 + 4} \leq 2 \iff \sqrt{k^2 + 4} \leq 2 - k$. Putem ridica inegalitatea la pătrat pentru că $2 - k > 0$ și obținem $k^2 + 4 \leq k^2 - 4k + 4$, adevărată.

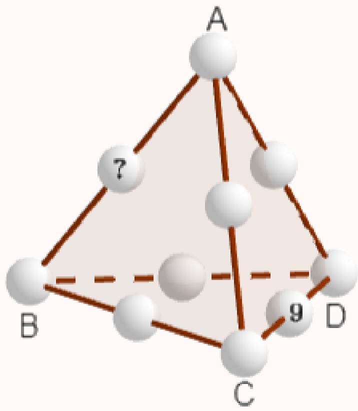
Numărul $a - \frac{1}{a}$ este întreg pentru $\boxed{8}$ valori.

Răspuns corect: $\boxed{8}$ .... $5p$

□

Problema 14

În vârfurile și pe laturile tetraedrului $ABCD$ se scriu toate cifrele nenule și numărul 11, astfel încât numărul scris pe fiecare muchie este suma numerelor scrise în extremitățile ei. Numărul scris pe muchia (CD) este 9. Care este numărul scris pe muchia (AB)?



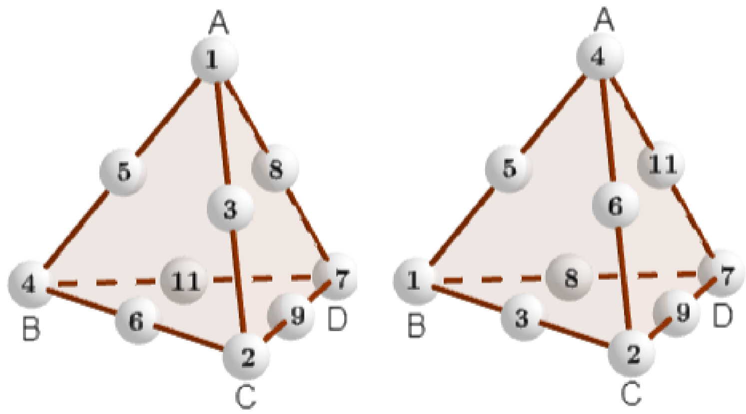
Demonstrație. Să observăm mai întâi că 1 și 2 sunt pe vârfuri, ele neputând fi scrise ca suma a două numere dintre cele pe care le avem la dispoziție. Pe de altă parte, 11 poate fi atribuit doar unei muchii pentru că suma cu oricare dintre celelalte numere este mai mare strict decât numerele care au fost scrise în vârfuri și pe muchii.

- dacă 1 și 2 nu sunt în extremitățile segmentului (CD), atunci amândouă sunt extremitățile segmentului (AB). Însă, în această situație, suma tuturor numerelor atribuite vârfurilor ar fi 12, adică nu se poate obține 11 pe nicio muchie.
- dacă în C îl avem pe 1, atunci în D îl avem pe 8 și acest caz nu este posibil pentru că 2 ar trebui să se afle în A sau B și împreună cu D se obține suma 10, care nu face parte din lista de numere.
- dacă în C este scris numărul 2, atunci în D este scris numărul 7.

  ∘ dacă în A este 1, atunci în B este neapărat 4 pentru că 11 se poate obține din perechile $(2, 9)$, $(3, 8)$, $(4, 7)$ și $(5, 6)$, iar pentru completarea de până acum singura variantă posibilă este $(4, 7)$. Pe muchia (AB) este scris numărul 5, iar configurația este prezentată în desenul de mai jos.

  ∘ dacă în B este 1, atunci, din aceleași considerente, în A este 4, suma scrisă pe muchia (AB) este 5, iar configurația este prezentată în desenul de mai jos.
- din simetrie, în cazul în care 1 sau 2 sunt scrise în D, se obțin configurații simetrice.

Am demonstrat astfel ca numărul scris pe muchia (AB) este $\boxed{5}$.



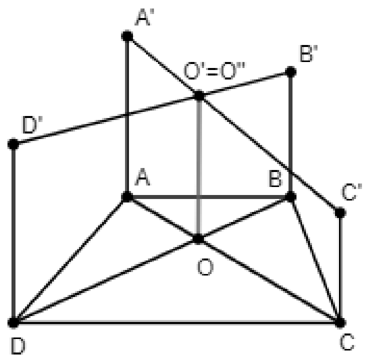
Răspuns corect: $\boxed{5}$ .... $5p$

□

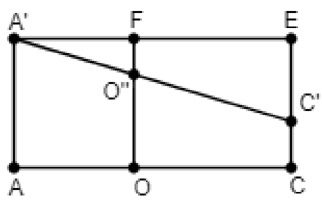
Problema 15

Pe planul trapezului $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ se ridică, de aceeași parte a planului, perpendicularele AA', BB', CC', DD'. Dacă $AB = x$, $CD = y$, $AA' = 13$, $BB' = 5$, $CC' = 4$, $DD' = 6$, iar dreptele $A'C'$ și $B'D'$ sunt concurente, atunci valoarea raportului $\frac{x}{y}$ este egală cu:

Demonstrație. Notăm cu $a = AA'$, $b = BB'$, $c = CC'$, $d = DD'$ și vom demonstra că dreptele $A'C'$ și $B'D'$ sunt concurente dacă și numai dacă $\frac{x}{y} = \frac{a-b}{d-c}$.
Notăm $\{O\} = AC \cap BD$. Planele (ACC') și (BDD') se intersectează după perpendiculara în O pe planul (ABC), pe care o notăm cu d.
Notăm $\{O'\} = d \cap B'D'$ și $\{O''\} = d \cap A'C'$. Dreptele $A'C'$ și $B'D'$ sunt concurente dacă și numai dacă $O' = O''$, adică $(OO') \equiv (OO'')$. **(1)**



Din $AB \parallel CD$ avem $\triangle AOB \sim \triangle DOC$, de unde rezultă că $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{x}{y}$. **(2)**
Construim $A'E \perp CC'$, $E \in C'C$ și $\{F\} = OO'' \cap A'E$.



Cum $O''F \parallel EC'$ obținem în $\triangle A'C'E$ că

$$\frac{O''F}{C'E} = \frac{A'F}{A'E} \ \textbf{(3)} \implies \frac{O''F}{a-c} = \frac{OA}{AC} \ \textbf{(4)}$$

(am ținut cont că $ACEA'$ este dreptunghi cu $a \geq c$).
Din **(2)** obținem

$$\frac{AO}{AO+OC} = \frac{x}{x+y} \iff \frac{OA}{AC} = \frac{x}{x+y} \ \textbf{(5)},$$

de unde obținem $O''F = \dfrac{x(a-c)}{x+y}$.
Pe de altă parte,

$$O''O = OF - O''F = a - \frac{x(a-c)}{x+y} = \frac{cx+ay}{x+y} \ \textbf{(6)}$$

(am ținut cont că $ACEA'$ este dreptunghi cu $OF = A'A = a$).
Analog, în dreptunghiul $DBGD'$, unde $D'G \perp BB'$, $G \in BB'$, cu $d \geq b$, găsim

$$OO' = \frac{dx+by}{x+y}. \ \textbf{(7)}$$

Din **(6)** și **(7)**, punând condiția $OO' = OO''$, obținem

$$\frac{dx+by}{x+y} = \frac{cx+ay}{x+y},$$

care este echivalentă cu $x(d-c) = y(a-b)$. Înlocuind cu valorile numerice din ipoteză obținem $\dfrac{x}{y} = \boxed{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{4}$ .... $5p$

□

Problema 16

Numerele reale a, b, c, d sunt soluțiile sistemului de ecuații

$$\begin{cases} a+b=-3 \\ ab+bc+ca=-4 \\ abc+bcd+cda+dab=14 \\ abcd=30 \end{cases}$$

Numerele întregi pozitive m și n sunt prime între ele și verifică relația $a^2+b^2+c^2+d^2 = \dfrac{m}{n}$.
Valoarea sumei $m+n$ este egală cu:

Demonstrație. Din ultima ecuație se observă că niciunul dintre cele patru numere nu poate lua valoarea 0. Din $abcd = 30 \implies bcd = \dfrac{30}{a}$, $cda = \dfrac{30}{b}$ și $dab = \dfrac{30}{c}$. Înlocuim în a treia ecuație și obținem $abc + 30\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) = 14 \iff abc + 30 \cdot \dfrac{ab+bc+ca}{abc} = 14$ și, folosind a doua ecuație, obținem $abc - \dfrac{120}{abc} = 14 \iff (abc)^2 - 14abc - 120 = 0$, cu soluțiile $abc = -6$ și $abc = 20$.

- Pentru $abc = -6$, înlocuind în a doua ecuație pe $ab = -\dfrac{6}{c}$ și $bc + ca = c(a+b) = -3c$ obținem ecuația de gradul al $II-$lea $3c^2 - 4c + 6 = 0$, care nu are soluții reale.

- Pentru $abc = 20$ avem de rezolvat ecuația $3c^2 - 4c - 20 = 0$, cu soluțiile $c = -2$ și $c = \frac{10}{3}$. Dacă $c = \frac{10}{3} \implies ab = 6$ și $a + b = -3$, fără soluții reale. Pentru $c = -2$ se obțin soluțiile $a = 2$, $b = -5$ și $d = \frac{3}{2}$.

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{141}{4}$ și $m + n = \boxed{145}$.

Răspuns corect: $\boxed{145}$ .... $5p$

$\square$

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore