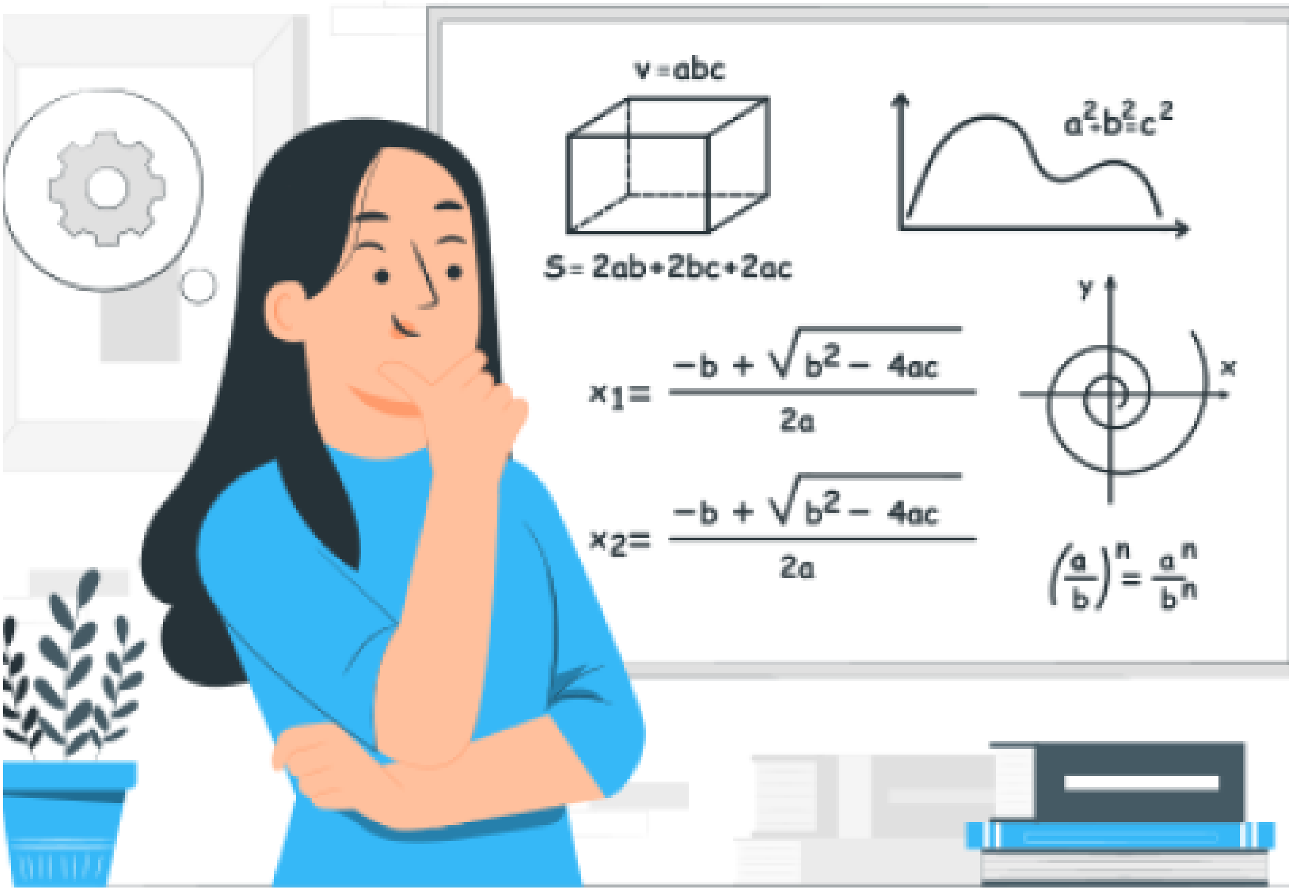

Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022

Etapa II
Clasa a VII-a

- Subiecte -
Lioara Ivanovici

§1 Subiecte

Problema 1

Fie numerele întregi a, b, c astfel încât $a < b < 0$ și $(a-b)(a-c) < 0$. Care este valoarea expresiei $A = \dfrac{32 \cdot (|a-b| + |b-c| + |c-a|)}{|b(1-c) - c(1-b)|}$?

Problema 2

Care este numărul de trei cifre $\overline{abc}$ pentru care $\sqrt{\overline{aabb}} = \overline{cc}$?

Problema 3

$ABCD$ este un paralelogram, iar M și N sunt două puncte în interiorul paralelogramului astfel încât $MN \parallel AB$. Suma ariilor triunghiurilor $\triangle ABN$ și $\triangle CDM$ este egală cu 18 cm^2. Care este aria paralelogramului $ABCD$?

Problema 4

La un concurs s-au înscris inițial 19 băieți și 11 fete. Trebuie să se formeze 8 echipe astfel încât fiecare echipă să aibă același număr de persoane și în fiecare echipă să fie număr egal de fete și băieți. Care este numărul minim de fete și băieți care ar trebui să se mai înscrie la concurs pentru a se putea forma echipele?

Problema 5

Un tren de călători este compus din 5 vagoane. În fiecare vagon se află cel puțin un călător. Spunem despre doi călători că sunt vecini dacă sunt în același vagon sau în vagoane vecine. Fiecare călător are 5 sau 10 vecini. Câți călători sunt în tren?

Problema 6

Probabilitatea ca, alegând un număr natural de șapte cifre, acesta să fie egal cu răsturnatul său este egală cu $\dfrac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, $(a, b) = 1$. Valoarea absolută a diferenței acestor două numere este egală cu:

Problema 7

Care este valoarea minimă a expresiei

$$E(x) = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2} + ... + \sqrt{(x-2022)^2},$$

unde x este număr real?

Problema 8

În triunghiul ABC considerăm înălțimea AD, $D \in (BC)$. Punctul $M \in (AD)$, astfel încât $AM = 2$ cm, iar $BC = 8$ cm. Care este valoarea sumei $\mathcal{A}_{ABM} + \mathcal{A}_{ACM}$?
Am notat cu $\mathcal{A}_{ABC}$ aria triunghiului $\triangle ABC$.

Problema 9

În pătratul $ABCD$ de latură 10 cm se consideră punctele $M \in (AB)$, $N \in (AD)$ și $P \in (DC)$, astfel încât $AM = 2$ cm, $AN = 3$ cm și $\mathcal{A}_{MNP} = 16$ cm^2. Care este lungimea segmentului (PC)?

Problema 10

În triunghiul $\triangle ABC$ punctul D este mijlocul lui (BC), punctul E este mijlocul lui (AD) și $\{F\} = BE \cap AC$. Raportul de arii $\dfrac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DCFE}}$ este egal cu fracția ireductibilă $\dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $(a, b) = 1$. Valoarea sumei $a + b$ este egală cu:

Problema 11

Fie a, b, c numere raționale pozitive, astfel încât $\dfrac{5}{a+7} + \dfrac{35}{7b+77} + \dfrac{65}{13c+169} = 0,(5)$. Care este valoarea expresiei $3 \cdot \left(\dfrac{a+4}{a+7} + \dfrac{b+8}{b+11} + \dfrac{c+10}{c+13}\right)$?

Problema 12

Pe un cerc sunt 11 numere naturale astfel încât suma oricăror 3 numere vecine este cel mult 19, iar suma oricăror 4 numere vecine este cel puțin 25. Suma celor 11 numere este egală cu:

Problema 13

Laturile pătratului $ABCD$ sunt împărțite de punctele M, N, P și Q în rapoartele $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BN}{CN} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{CP}{PD} = \dfrac{1}{2}$ si $\dfrac{DQ}{QA} = \dfrac{1}{2}$, iar T este un punct situat în interiorul pătratului. Știm că $TNCP$ este dreptunghi. Se știe că aria patrulaterului $BMTN$ este 24 cm^2. Care este aria patrulaterului $AMTQ$?

Problema 14

Care este dublul sumei tuturor fracțiilor de forma $\dfrac{x}{y}$, unde $x, y \in \mathbb{N}^*$, și $x < y \leq 2022$?

Problema 15

În patrulaterul $ABCD$ știm că $AD \parallel BC$, $AB = BC = BD$. Fie $BK \perp AD$, $K \in AD$ și $BK \cap AC = \{M\}$. Determinați măsura unghiului $\angle CDM$.

Problema 16

Se consideră opt puncte pe un cerc care îl împart în opt arce de cerc congruente. Se colorează cu roșu n dintre aceste puncte, $n \leq 8$. Care este cea mai mică valoare a lui n astfel încât, oricum s-ar face această colorare, să existe un triunghi isoscel cu toate vârfurile roșii?

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore