

Concursul de matematică Upper.School Ediția 2022

Etapa II
Clasa a VIII-a

- Subiecte -
Lioara Ivanovici

§1 Subiecte

Problema 1

Care este soluția reală pozitivă a ecuației

$$\frac{x^2 + 9}{x} + \frac{x^2 + 15}{x + 1} + \frac{x^2 + 21}{x + 2} + \dots + \frac{x^2 + 2019}{x + 335} = 2016?$$

Mihaela Berindeanu

Problema 2

Fie $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{5}) < 0$ și $(y - \sqrt{5})(y - \sqrt{10}) < 0$. Care este valoarea expresiei $E(x, y) = |x - y|$?

Problema 3

Să se determine cifra n din numărul $x = \overline{1, n12}$, care este soluție a ecuației

$$2\langle x \rangle + x = \overline{2, 488}$$

unde cu $\langle x \rangle$ se notează distanța de la x la cel mai apropiat număr întreg față de x .

Problema 4

Câte numere reale x sunt soluții ale inecuației $3 \geq |4x^2 - 1| + |4x - 5|$?

Problema 5

Câte numere naturale de 6 cifre au proprietatea că fiecare cifră din scrierea sa în baza 10 apare de atâtea ori cât este valoarea sa?

Problema 6

Care este soluția reală a ecuației

$$\left[-x + \frac{2022}{120} \right]^2 + x - 6\sqrt{x - 7} = -2?$$

Am notat prin $[x]$ partea întreagă a numărului real x .

Problema 7

Fie $VABC$ o piramidă cu baza $\triangle ABC$ triunghi echilateral, iar O este centrul cercului circumscris bazei. Paralelele prin O la VA, VB, VC intersectează fețele opuse în A', B' , respectiv C' . Valoarea sumei $S = \frac{OA'}{VA} + \frac{OB'}{VB} + \frac{OC'}{VC}$ este egală cu:

Problema 8

Determinați numărul natural prim p pentru care $16p + 1$ este cubul unui număr întreg pozitiv.

Problema 9

Prin schimbarea ordinii cifrelor unui număr natural de două cifre, pătratul acestuia crește cu 495 față de pătratul numărului inițial. Care este acest număr?

Problema 10

Care este valoarea maximă a expresiei

$$E(x, y) = x + y + xy - x^2 - y^2,$$

unde $x, y \in \mathbb{R}$?

Problema 11

Fie $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AA' = 12$ cm, $AB = 6$ cm și $BC = 4$ cm. Vom nota cu M mijlocul muchiei (AB) . Care este valoarea cotangentei unghiului determinat de planele $(A'DM)$ și $(D'DM)$?

Problema 12

Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$. Care este valoarea numărului real x pentru care are loc egalitatea

$$\mathcal{A}_{D'AC}^2 = x \cdot (\mathcal{A}_{D'AD}^2 + \mathcal{A}_{D'CD}^2 + \mathcal{A}_{DAC}^2)?$$

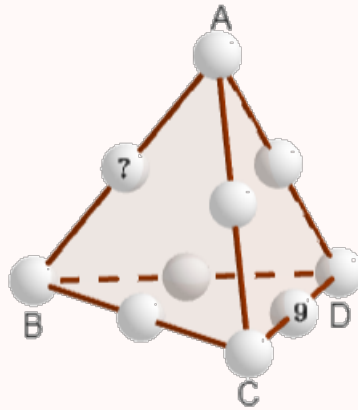
Am notat cu \mathcal{A}_{ABC} aria triunghiului $\triangle ABC$.

Problema 13

Pentru câte valori reale ale numărului a , care aparține intervalului $(1, 9)$, numărul $a - \frac{1}{a}$ este număr întreg?

Problema 14

În vârfurile și pe laturile tetraedrului $ABCD$ se scriu toate cifrele nenule și numărul 11, astfel încât numărul scris pe fiecare muchie este suma numerelor scrise în extremitățile ei. Numărul scris pe muchia (CD) este 9. Care este numărul scris pe muchia (AB) ?



Problema 15

Pe planul trapezului $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ se ridică, de aceeași parte a planului, perpendicularele AA' , BB' , CC' , DD' . Dacă $AB = x$, $CD = y$, $AA' = 13$, $BB' = 5$, $CC' = 4$, $DD' = 6$, iar dreptele $A'C'$ și $B'D'$ sunt concurente, atunci valoarea raportului $\frac{x}{y}$ este egală cu:

Problema 16

Numerele reale a, b, c, d sunt soluțiile sistemului de ecuații

$$\begin{cases} a + b = -3 \\ ab + bc + ca = -4 \\ abc + bcd + cda + dab = 14 \\ abcd = 30 \end{cases}$$

Numerele întregi pozitive m și n sunt prime între ele și verifică relația $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{m}{n}$. Valoarea sumei $m + n$ este egală cu:

Problemele 1-16: $16 \times 5p = 80p$

Puncte acordate din oficiu: $20p$

Total: $100p$

Timp de lucru: 3 ore