

Concursul de Matematică Upper.School ediția 2019

Etapa III - Clasa a 7-a

Lista de probleme

PROBLEMA 1 / 4

punctaj: 7

Aflați numerele prime p, q, r care satisfac simultan următoarele condiții:

$$qr \mid p^4 - 1$$

$$rp \mid q^4 - 1$$

$$pq \mid r^4 - 1$$

PROBLEMA 2 / 4

punctaj: 7

Avem n bile, $n \geq 100$, care vor fi împărțite în n cutii, în mai mulți pași, astfel:

- la pasul 1 se pun toate bilele într-o singură cutie;
- la pasul 2 se iau toate bilele din cutie și se împart aleator în alte 2 cutii;
-
- la pasul k se iau toate bilele dintr-o cutie și se împart aleatoriu în alte 2 cutii goale, obținându-se k cutii cu cel puțin o bilă în fiecare cutie;
-
- Se continuă până la pasul n când se obțin n cutii cu câte o bilă fiecare.

a) Notăm cu A_k suma pătratelor numerelor de bile din cele k cutii obținute după pasul k .

Demonstrați că $A_k > A_{k+1}$ pentru fiecare $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

b) Pentru fiecare pas, începând cu al doilea, calculăm produsul numerelor bilelor din cutiile nou formate și notăm cu S suma tuturor acestor produse. Demonstrați că S are aceeași valoare indiferent de modul de împărțire pe parcurs. Care este această valoare?

PROBLEMA 3 / 4

punctaj: 7

Se consideră triunghiul ABC în care $m(\angle BAC) = 50^\circ$ și $m(\angle ACB) = 30^\circ$. Punctele D și E sunt situate pe segmentele (AB) , respectiv (AC) , astfel încât $m(\angle ACD) = 10^\circ$ și $m(\angle ABE) = 20^\circ$. Aflați $m(\angle ADE)$.

PROBLEMA 4 / 4

punctaj: 7

O mulțime A se numește „**triunghiulară de tip n** ” dacă este o submulțime a mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ și oricare trei elemente diferite din A sunt laturile unui triunghi nedegenerat.

a) Aflați cardinalul maxim al unei mulțimi „**triunghiulare de tip 9**”.

b) Aflați cardinalul maxim al unei mulțimi „**triunghiulare de tip 2019**”.

Sursa: Olimpiadă Mexic 2017

Total puncte:

28