Concursul de Matematică Upper.School ediția 2019
Etapa III - Clasa a 8-a
Lista de probleme

PROBLEMA 1 / 4 — punctaj: 7

În planul α *se consideră poligonul convex* $[A_1A_2 \dots A_n]$ *și punctul M situat în afara planului* α. *Bisectoarele unghiurilor* $\measuredangle A_1MA_2$, $\measuredangle A_2MA_3$, ..., $\measuredangle A_nMA_1$ *intersectează segmentele* $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_nA_1]$ *în punctele* M_1, M_2, ..., M_n. *Dacă are loc egalitatea* $\frac{M_1A_1}{M_1A_2}+\frac{M_2A_2}{M_2A_3}+\dots+\frac{M_nA_n}{M_nA_1}=n$ *să se demonstreze că poligonul* $[A_1A_2 \dots A_n]$ *este inscriptibil.*

PROBLEMA 2 / 4 — punctaj: 7

Găsiți toate tripletele de numere naturale nenule (a, b, c) astfel încât $a^2+b+3=(b^2-c^2)^2$.

PROBLEMA 3 / 4 — punctaj: 7

Numerele naturale a, b, c, d cu $a<b<c<d$ *satsifac egalitatea* $ad=bc$. *Demonstrați că* $\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 \geq a+2$.

PROBLEMA 4 / 4 — punctaj: 7

*O mulțime M de numere naturale este „**echilibrată”** dacă pentru orice valoare naturală a numărului k*, $1 \leq k \leq n$, *media aritmetică pentru orice k elemente este un număr natural. Care este cardinalul maxim al unei mulțimi „**echilibrate”** cu toate elementele mai mici sau egale cu 2019? Construiți un exemplu.*

Sursa: Olimpiadă Mexic 2017

Total puncte: 28