Concursul de Matematică Upper.School ediția 2019

Etapa III - Clasa a 5-a

Lista de probleme

PROBLEMA 1 / 4 punctaj: 7

Radu joacă un joc pe calculator și are un anumit număr de puncte la început.

- *dacă apasă tasta W i se triplează numărul de puncte;*
- *dacă apasă tasta A i se dublează numărul de puncte;*
- *dacă apasă tasta S primeşte în plus 1000 de puncte.*

a) Dacă Radu apasă tastele în această ordine, pe fiecare o singură dată, constată că la final are 1600 de puncte. Câte puncte a avut Radu inițial?
b) Care este punctajul maxim pe care îl poate obține Radu, apăsând fiecare tastă o singură dată, dacă la început are 200 de puncte?

Raspuns corect:
Solutie:

a) Notăm cu n numărul de puncte pe care l-a avut Radu inițial.
$n \xrightarrow{W} 3n \xrightarrow{A} 6n \xrightarrow{S} 6n+1000 \Rightarrow \boxed{n=100}$
b) Avem următoarel cazuri:
$n \xrightarrow{W} 3n \xrightarrow{A} 6n \xrightarrow{S} 6n+1000$

$n \xrightarrow{W} 3n \xrightarrow{S} 3n+1000 \xrightarrow{A} 6n+2000$

$n \xrightarrow{A} 2n \xrightarrow{W} 6n \xrightarrow{S} 6n+1000$

$n \xrightarrow{A} 2n \xrightarrow{S} 2n+1000 \xrightarrow{W} 6n+3000$

$n \xrightarrow{S} n+1000 \xrightarrow{W} 3n+3000 \xrightarrow{A} 6n+6000$

$n \xrightarrow{S} n+1000 \xrightarrow{A} 2n+2000 \xrightarrow{W} 6n+6000$
Punctajul maxim este $6n+6000=7200$

Barem

a) Aplicarea succesiunii de transformări.	1 p
Identificarea soluției n=100.	1 p
b) Descrierea celor 6 *succesiuni. Dacă se omit variante punctajul este de* 2*p.*	4 p

Punctajul maxim este 7200.

1 p

PROBLEMA 2 / 4

punctaj: 7

În cele 12 *pătrățele ale unui tabel dreptunghiular cu* 3 *linii și* 4 *coloane se sciu, într-o ordine oarecare, numerele* 1, 2, 3, ..., 12.
a) Andrei a aranjat numerele în tabel, iar după ce a șters trei numere a constatat că produsul numerelor rămase este pătrat perfect. Ce numere a șters Andrei?
b) Spunem că o aranjare a numerelor în tabel este o ***„aranjare pară”*** *dacă suma numerelor din fiecare coloană a sa este un număr par și că o coloană este* ***„coloană pară”*** *dacă fiecare dintre cele trei numere scrise în pătrățelele ei este un număr par. Câte* ***„coloane pare”*** *putem avea într-o* ***„aranjare pară”****?*
c) Aflați toate numerele naturale k pentru care există o așezare a celor 12 numere în tabel astfel încât suma numerelor din fiecare linie să se dividă cu k.

Raspuns corect:
Solutie:

a) În produsul $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot 12 = 2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$ *numerele prime* 7 *și* 11 *apar la puterea* 1, *deci trebuie eliminate, iar* 3 *apare la o putere impară, deci cel de-al treilea număr eliminat de Andrei este* 3 *sau* 12.
b) O ***„aranjare pară”*** *are în fiecare coloană un număr par de numere impare, deci are două sau zero numere impare. Cum sunt* 4 *coloane și* 6 *numere impare, trei dintre coloane au câte două numere impare și una singură nu are niciun număr impar.*
Așadar o ***„aranjare pară”*** *are exact o* ***„coloană pară”****.*
c) Suma celor 12 *numere din tabel este* $6\cdot 13 = 78$. *Dacă suma numerelor din fiecare linie se divide cu k, atunci și suma numerelor din întreg tabelul se divide cu k, deci k este un divizor al lui* $6\cdot 13$. *Așadar* $k \in \{1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78\}$.
Dacă $k \geq 39$, *atunci suma numerelor din fiecare linie ar fi cel puțin* 39, *deci suma numerelor din tabel ar fi cel puțin* $3\cdot 39 = 108$, *imposibil. Deci* $k \leq 26$.

Exemplu pentru k=26

8	7	6	5
4	9	1	12
2	3	10	11

Exemplu pentru k=6

1	2	3	6
4	8	5	7
9	10	11	12

Cum numerele 1, 2, 3 *sunt divizori ai lui* 6, *iar* 13 *este un divizor al lui* 26
$\Rightarrow k \in \{1, 2, 3, 6, 13, 26\}$.

Barem

a) Aflarea produsului tuturor numerelor din tabel. Eliminarea lui 7 *și* 11*.*

1 p

Eliminarea lui 3 *sau* 12*.*

1 p

b) O coloana are 0 *sau* 2 *numere impare, de unde rezultă concluzia.*

1 p

c) $k \in \{1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78\}$.

1 p

$k \leq 26$.

1 p

Exemplu pt k=6 *și* k=26.

1 p

Finalizarea demonstrației.

1 p

PROBLEMA 3 / 4

punctaj: 7

Fie n>18 *un număr natural astfel încât n-1 și n+1 sunt ambele prime. Demonstrați că n are cel puțin* 8 *divizori diferiți.*

Raspuns corect:
Solutie:

Cum $n > 18 \Rightarrow n - 1 > 17$. *Numerele n*-1 *și n*+1 *sunt numere prime mai mari decât* 17 *obținem că n este număr par, deci* $n \vdots 2$.
Numerele n-1*, n și n*+1 *sunt consecutive și unul dintre ele este divizibil cu* 3*. Cum n*-1 *și n*+1 *sunt numere prime, cel puțin egale cu* 17*, avem că* $n \vdots 3$.
$n \vdots 2$, $n \vdots 3$, $(2,3) = 1 \Rightarrow n \vdots 6 \Leftrightarrow n = 6k$, $k > 3$.
Patru divizori sunt 1, 2, 3, 6.

- *Dacă* $k = 4 \Rightarrow n = 24$ *și* $n + 1 = 25$ *care nu este prim;*
- *Dacă* $k = 5 \Rightarrow n = 30$ *și verifică toate cerințele n*-1=29*(prim) și n*+1=31*(prim), iar* 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 *sunt* 8 *divizori;*
- *Dacă* $k = 6 \Rightarrow n = 36$ *și* $n - 1 = 35$ *care nu este prim;*
- *Dacă* $k > 6 \Rightarrow n > 36$ *iar* $\frac{n}{6}, \frac{n}{3}, \frac{n}{2}, n$ *sunt alți patru divizori ai lui n.*

Barem

n este număr divizibil cu 2. 1 p

n este număr divizibil cu 3. 1 p

$n \vdots 6 \Rightarrow n = 6k$ *și patru divizori sunt* 1, 2, 3, 6. 1 p

Analizarea cazului k=4. 1 p

Analizarea cazului k=5. 1 p

Analizarea cazului k=6. 1 p

Finalizarea demonstrației. 1 p

PROBLEMA 4 / 4

punctaj: 7

*Un număr natural se numește **„palindrom”** dacă el coincide cu răsturnatul lui. Care numere **„palindrom”** au proprietatea că adunate cu 2019 dau rezultatul tot un număr **„palindrom”**?*

Raspuns corect:

Solutie:

*Vom căuta, pentru început, printre numerele **„palindrom”** cu puține cifre.*
i) Pentru numerele cu o singură cifră, fie aceasta a, ar trebui ca 2019+a *să fie **„palindrom”**.*
Ordinul de mărime a cifrei miilor nu se modifică, așadar a este 3*, iar* 2019+3=2022 *nu este **„palindrom”**.*
ii) Pentru numerele de două cifre, evident identice $2019+\overline{aa}$ *este **„palindrom”** dacă a=*3.
Dar 2019+33=2052 *nu este **„palindrom”**.*
iii) Pentru $\overline{aba}$ *(numere de trei cifre), avem* $2019+\overline{aba}=\overline{xyyx}$ (1)
Cifra x este 2 *sau* 3 *pentru că* $\overline{aba}$ *este cel mult 999. Chiar este ușor de verificat ca x este* 3 *pentru puține cazuri. O trecere peste ordin la cifra sutelor se întâmplă pentru numerele cel puțin egale cu* 981*, iar în acest caz* 989 *și* 999 *sunt singurele numere de tip **„palindrom”** și niciunul nu satisface cerințele problemei.*
Pentru $x=2 \Rightarrow a=3$ *și* (1) *devine* $2019+\overline{3b3}=\overline{2yy2} \Leftrightarrow 32+b=11y \Leftrightarrow 33+b-1=11y \Rightarrow$
$b-1 \vdots 11 \Rightarrow \boxed{b=1}, \boxed{y=3}$
2019+313=2332 *și reținem soluția* $\boxed{\overline{aba}=313}$
*iv) Dacă **„palindromul”** are* 4 *cifre obținem că* $2019+\overline{abba}=\overline{cddc}$. *Numerele **„palindrom”** sunt divizibile cu* 11*, pe când* 2019 *nu este divizibil cu* 11.
v) În cele din urmă vom demonstra că nu mai avem alte numere care să se bucure de această

proprietate

$$\begin{array}{r} a_1\,a_2\,a_3\cdots a_3\,a_2\,a_1 \; + \\ 2\;\;0\;\;1\;\;9 \\ \hline b_1\,b_2\,b_3\cdots b_3\,b_2\,b_1 \end{array}$$

- *Dacă* $a_1=1 \Rightarrow b_1=0$ *(nu convine)*
- *Dacă* $a_1>2 \Rightarrow b_1=a_1-1$ *ca ultimă cifră și* $b_1=a_1$ *sau* $b_1=a_1+1$ *ca primă cifră (nu convine)*

În concluzie există un singur număr $\boxed{\overline{aba}=313}$ *care satisface cerințele problemei.*

Barem

Analizarea cazului cu palindrom de 1 *cifră.*	1 p
Analizarea cazului cu palindrom de 2 *cifre.*	1 p
Analizarea cazului cu palindrom de 3 *cifre* (*subcazul cu cifra miilor egală cu* 3).	1 p
Analizarea cazului cu palindrom de 3 *cifre* (*subcazul cu cifra miilor egală cu* 2) *și aflarea soluției.*	1 p
Analizarea cazului cu palindrom de 4 *cifre.*	1 p
Demonstrația faptului că nu mai există alte soluții.	2 p

Total puncte: 28