Concursul de Matematică Upper.School ediția 2019

Etapa III - Clasa a 6-a

Lista de probleme

PROBLEMA 1 / 4 punctaj: 7

Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ *și n care au proprietatea* $\overline{ab}^2 = 6(3n+2)(n+1)$.

Raspuns corect:
Solutie:

Ecuația se rescrie astfel:
$\overline{ab}^2 = 2(3n+2)(3n+3)$
Ultima cifră a produsului a două numere consecutive este 0, 2 *sau* 6. *Obținem că ultima cifră pentru* $\overline{ab}^2 \in \{0, 4\} \Rightarrow b \in \{0, 2, 8\}$.
În plus, $\overline{ab}^2 \vdots 3$, 3 *este număr prim, de aici avem că* $\overline{ab} \vdots 3$

- $b=0 \Rightarrow a \in \{3, 6, 9\}$
  - $a=3 \Rightarrow 30^2 = 2(3n+2)(3n+3) \Rightarrow 450 = (3n+2)(3n+3)$
    Dar $20 \cdot 21 < 450 < 21 \cdot 22$
  - $a=6 \Rightarrow 60^2 = 2(3n+2)(3n+3) \Rightarrow 1800 = (3n+2)(3n+3)$
    Dar $41 \cdot 42 < 1800 < 42 \cdot 43$
  - $a=9 \Rightarrow 90^2 = 2(3n+2)(3n+3) \Rightarrow 4050 = (3n+2)(3n+3)$
    Dar $63 \cdot 64 < 4050 < 64 \cdot 65$
- $b=2 \Rightarrow a \in \{1, 4, 7\}$
  - $a=1 \Rightarrow 12^2 = 2(3n+2)(3n+3) \Rightarrow 72 = (3n+2)(3n+3)$
    $\Rightarrow 3n+2 = 8 \Rightarrow \boxed{n=2}, \boxed{\overline{ab}=12}$
  - $a=4 \Rightarrow 42^2 = 2(3n+2)(3n+3) \Rightarrow 882 = (3n+2)(3n+3)$
    Dar $29 \cdot 30 < 882 < 30 \cdot 31$
  - $a=7 \Rightarrow 72^2 = 2(3n+2)(3n+3) \Rightarrow 2592 = (3n+2)(3n+3)$
    Dar $50 \cdot 51 < 2592 < 51 \cdot 52$
- $b=8 \Rightarrow a \in \{1, 4, 7\}$
  - $a=1 \Rightarrow 18^2 = 2(3n+2)(3n+3) \Rightarrow 162 = (3n+2)(3n+3)$
    Dar $12 \cdot 13 < 162 < 13 \cdot 14$
  - $a=4 \Rightarrow 48^2 = 2(3n+2)(3n+3) \Rightarrow 1152 = (3n+2)(3n+3)$
    Dar $33 \cdot 34 < 1152 < 34 \cdot 35$
  - $a=7 \Rightarrow 78^2 = 2(3n+2)(3n+3) \Rightarrow 3042 = (3n+2)(3n+3)$
    Dar $54 \cdot 55 < 3042 < 55 \cdot 56$

Obținem soluția: $\boxed{n=2}, \boxed{\overline{ab}=12}$

Barem

Rescriere ecuație sub forma $\overline{ab}^2 = 2(3n+2)(3n+3)$.

1 p

Ultima cifră a produsului a două numere consecutive este 0, 2 *sau* 6.

1 p

Identificare cazuri $b \in \{0, 2, 8\}$.

1 p

Demonstrație $\overline{ab} \vdots 3$.

2 p

Analiza cazurilor b=0, b=2, b=8 și găsirea soluției.

2 p

PROBLEMA 2 / 4

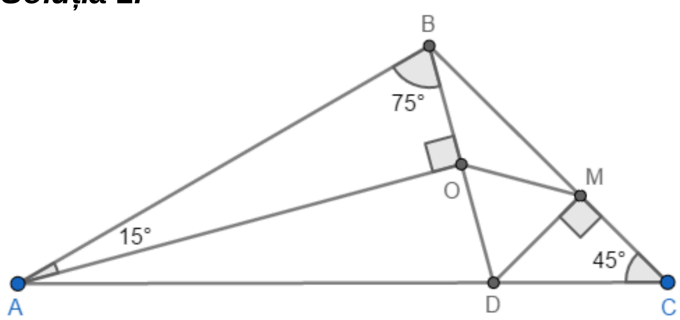
punctaj: 7

În triunghiul ABC, $m(\measuredangle CAB) = 30°$ *și* $m(\measuredangle ABC) = 105°$. *Considerăm punctul O în interiorul triunghiului astfel încât* $m(\measuredangle OAB) = 15°$ *și* $m(\measuredangle OBA) = 75°$. *Aflați* $m(\measuredangle OCB)$.

Raspuns corect:

Solutie:

Soluția 1:



Notăm cu D intersecția dintre BO și AC. Este ușor de observat că $AO \perp BD$.

Cum (AO este și bisectoarea $\measuredangle BAD$ *obținem că* $\triangle BAD$ *este isoscel și (AO) este mediana* $\Rightarrow (BO) \equiv (OD)$

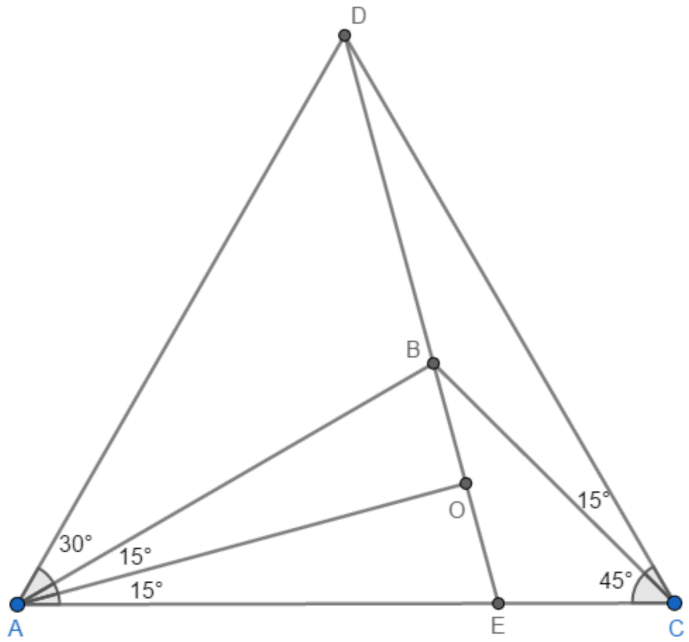
Fie $DM \perp MC$, $M \in (BC)$. *În triunghiul dreptunghic BDM, din teorema medianei, se obține că* $(OM) \equiv (OD)$.

Cum $m(\measuredangle ODM) = 60° \Rightarrow \triangle ODM$ *este echilateral.*

$$\left.\begin{aligned}(DM) &\equiv (OM)\\(DM) &\equiv (MC)\end{aligned}\right\} \Rightarrow (OM) \equiv (MC) \Rightarrow \triangle OMC \text{ este isoscel cu}$$

$m(\measuredangle OMC) = 150° \Rightarrow m(\measuredangle OCB) = 15°$

Soluția 2:



Construim triunghiul echilateral DAC în același semiplan cu $\triangle ABC$. *AB este mediatoarea laturii* $(DC) \Rightarrow (BC) \equiv (BD) \Rightarrow m(\measuredangle BCD) = m(\measuredangle BDC) = 15^\circ \Rightarrow$ $m(\measuredangle ADB) = 45^\circ \Rightarrow m(\measuredangle ABD) = 105^\circ \Rightarrow D, B, E$ *sunt coliniare. Din calcul ușor de unghiuri obținem că* $(OD) \equiv (OA)$ *și* $\triangle ODC \equiv \triangle OAC \Rightarrow m(\measuredangle OCA) = m(\measuredangle OCD) = 30^\circ \Rightarrow$ $m(\measuredangle OCB) = 15^\circ$

Barem 1

Demonstrație $\triangle BAD$ *isoscel.*	1 p
Construcție $DM \perp MC$, $M \in (BC)$.	2 p
Demonstrație $\triangle ODM$ *echilateral.*	1 p
Demonstrație $\triangle OMC$ *isoscel.*	2 p
Identificare $m(\measuredangle OCB) = 15^\circ$.	1 p

Barem 2

Construcție $\triangle DAC$ *echilateral.*	1 p
AB este mediatoarea laturii (DC).	1 p

Demonstrație punctele D, B, E sunt coliniare. 2 p

Demonstrație $(OD) \equiv (OA)$. 1 p

Demonstrație $\triangle ODC \equiv \triangle OAC$. 1 p

Identificare $m(\measuredangle OCB) = 15°$. 1 p

PROBLEMA 3 / 4

punctaj: 7

Cameleonul este o reptilă arboricolă și insectivoră din regiunile tropicale, care are proprietatea de a-și schimba culoarea pielii potrivit mediului înconjurător. Toți cameleonii din insula Madagascar s-au colorat astfel:

- *în roșu cei care au un prieten;*
- *în galben cei care au doi prieteni;*
- *în albastru cei care au trei prieteni.*

Nu există doi prieteni de aceeași culoare. Cei de culoare albastră nu au prieteni printre cei de culoare galbenă.

Într-o zi, 400 *de cameleoni de culoare albastră și* 43 *de culoare galbenă s-au colorat in roșu, iar alți* 225 *de culoare roșie și-au schimbat culoarea în albastru. Ca urmare, oricare doi prieteni au acum aceeași culoare.* ***Câți cameleoni sunt în insula Madagascar?***

Raspuns corect:

Solutie:

Observăm că atât cameleonii galbeni, cât și cei albaștri au doar prieteni roșii.
Se pot forma grupe de câte 4 *(unul albastru și* 3 *roșii) și de câte* 3 *(unul galben și* 2 *roșii).*
După recolorare nu mai sunt cameleoni galbeni pentru că ar însemna că acei cameleoni galbeni au prieteni de aceeași culoare, adică tot galbeni și se obține o contradicție cu afirmația "Nu există doi prieteni de aceeași culoare". După recolorare au rămas doar cameleoni colorați în roșu $(4 \cdot 400 + 3 \cdot 43)$ *și cameleoni albaștri* $(4 \cdot 225 : 3)$.

Numărul tuturor cameleonilor este: $4 \cdot 400 + 3 \cdot 43 + \dfrac{4 \cdot 225}{3} = 2029$.

Barem

Cameleonii galbeni, cât și cei albaștri au doar prieteni roșii. 1 p

Identificare grupe de câte 4 (unul albastru și 3 roșii) și de câte 3 (unul galben și 2 roșii). 2 p

Nu mai sunt cameleoni galbeni după recolorare. 1 p

Calcul corect număr cameleoni colorați în roșu. 1 p

Calcul corect număr cameleoni colorați în albastru. 1 p

Calcul rezultat final. 1 p

PROBLEMA 4 / 4

punctaj: 7

*Numărul natural nenul n se numește **„număr picant”** dacă există numerele naturale nenule a, b, x, y cu proprietățile:*

$a+b=n$ *și* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

*Demonstrați că n este **„număr picant”** dacă si numai dacă n este compus.*

Raspuns corect:

Solutie:

*Vom demonstra că **„numerele picante”** sunt numere compuse.*

*Dacă n este **„număr picant”*** $\Rightarrow \exists a,b \in \mathbb{N}$ *cu* $n=a+b\geq 1+1=2$ *de unde concluzia că 1 nu este **„număr picant”**.*

Alegem un număr prim n și presupunem că există numere naturale nenule a, b, x, y pentru care

$n=a+b$ *și* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Din $n=a+b$ *și n prim se obține ușor că a și b sunt prime între ele.*

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Leftrightarrow xb+ya=ab \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} a \mid xb \\ (a,b)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \mid x \Rightarrow x \geq a$$

La fel se demonstrează ca $y \geq b$, *de aici contradicția* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\geq 2>1$

*Pentru a demonstra că orice număr natural nenul compus este **„număr picant”** vom face o alegere a numerelor a, b, x, y.*

Cum n este compus exisă numere naturale nenule u și v pentru care $n=u\cdot v$, $u\geq 2$, $v\geq 2$.

Alegând $b=v$ *și* $a=(u-1)v$ *avem* $a+b=uv-v+v=uv=n$.

Pentru $x=(u-1)(v-1)$ *și* $y=1$ *se verifică a doua relație*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{(u-1)(v-1)}{(u-1)v}+\frac{1}{v}=\frac{v-1}{v}+\frac{1}{v}=1.$$

*Prin urmare orice număr compus este **„număr picant”***

Barem

Demonstrație că 1 *nu este* ***„număr picant”.***

1 p

Demonstrație că un număr prim nu este ***„număr picant”.***

2 p

Exemplu pentru numerele a, b, x, y.

4 p

Total puncte: **28**