Concursul de Matematică Upper.School ediția 2019

Etapa III - Clasa a 7-a

Lista de probleme

PROBLEMA 1 / 4 punctaj: 7

Aflați numerele prime p, q, r care satisfac simultan următoarele condiții:

$qr \mid p^4 - 1$

$rp \mid q^4 - 1$

$pq \mid r^4 - 1$

Raspuns corect:

Solutie:

Este ușor de dovedit că nu există soluție pentru cazul în care două dintre numere sunt egale.
Dacă, de exemplu, p=q atunci, din $pr \mid q^4 - 1 \Rightarrow pr \mid p^4 - 1 \Rightarrow p \mid p^4 - 1$. *Dar* $p \mid p^4 \Rightarrow p \mid 1$ (*imposibil*)
Așadar p, q și r sunt distincte. Intrucât relațtiile sunt simetrice putem să ordonăm numerele. Fie p<q<r.

Atunci $qr \mid p^4 - 1 = (p-1)(p+1)(p^2+1)$.

$$\left.\begin{array}{r} p-1 < p < q < r \\ q,\, r \text{ prime} \end{array}\right\} \Rightarrow (qr,\, p-1) = (q,\, p-1) = 1$$

$$\Rightarrow qr \mid (p^2+1)(p+1)$$

Dar $p^2+1 < (p+1)^2 = (p+1)(p+1) < qr \Rightarrow qr \nmid p^2+1 \Rightarrow$ *Fie* $q \mid p+1$, *fie* $r \mid p+1$ (1)

Cum $p < q < r \Rightarrow p+2 \le r \Rightarrow r \nmid p+1$ (2)

Din (1) *și* (2) $\Rightarrow q \mid p+1$. *Dar* $q \ge p+1 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} q = p+1 \\ q, p \text{ prime} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{p=2},\ \boxed{q=3}$$

Din $qr \mid p^4 - 1 \Rightarrow 3r \mid 15 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} r \mid 5 \\ r \text{ prim} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r=5}$$

Tripletele căutate sunt (2, 3, 5) *și toate permutările.*

Barem

Eliminare caz de egalitate.	1 p
Ordonare $p < q < r$ *și demonstrație* $qr \mid (p^2+1)(p+1)$.	1 p

Demonstrație $qr \nmid p^2+1$.

2 p

Demonstrație $r \nmid p+1$.

1 p

Analiză caz $q \mid p+1$.

1 p

Identificare soluție.

1 p

PROBLEMA 2 / 4

punctaj: 7

Avem n bile, $n \geq 100$, *care vor fi împărțite în n cutii, în mai mulți pași, astfel:*

- *la pasul* 1 *se pun toate bilele într-o singură cutie;*
- *la pasul 2 se iau toate bilele din cutie și se împart aleator în alte 2 cutii;*
- *....*
- *la pasul k se iau toate bilele dintr-o cutie și se împart aleatoriu în alte 2 cutii goale, obținându-se k cutii cu cel puțin o bilă în fiecare cutie;*
- *....*
- *Se continuă până la pasul n când se obțin n cutii cu câte o bilă fiecare.*

a) Notăm cu A_k *suma pătratelor numerelor de bile din cele k cutii obținute după pasul k.*
Demonstrați că $A_k > A_{k+1}$ *pentru fiecare* $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$
b) Pentru fiecare pas, începând cu al doilea, calculăm produsul numerelor bilelor din cutiile nou formate și notăm cu S suma tuturor acestor produse. Demonstrați că S are aceeași valoare indiferent de modul de împărțire pe parcurs. Care este această valoare?

Raspuns corect:
Solutie:

a) Dacă x este numărul de bile din cutia care este separată în alte două cutii la pasul $k+1$, $k \geq 1$ *iar m și n reprezintă numărul de bile din cele două cutii nou formate la pasul* $k+1$ *atunci*
$A_k - A_{k+1} = x^2 - m^2 - n^2 = (m+n)^2 - m^2 - n^2 = 2mn > 0 \Rightarrow A_k > A_{k+1}$
b) Din punctul anterior obținem că produsul numerelor bilelor din cutiile nou formate la pasul k este $\frac{1}{2}(A_{k-1} - A_k)$.

$$S = \frac{1}{2}(A_1 - A_2) + \frac{1}{2}(A_2 - A_3) + \ldots + \frac{1}{2}(A_{n-1} - A_n) \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{2}(A_1 - A_n) = \frac{1}{2}(n^2 - \underbrace{1^2 - 1^2 - \ldots - 1^2}_{n \text{ ori}}) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

Barem

a) Demonstrație $A_k > A_{k+1}$

3 p

b) Produsul numerelor bilelor din cutiile nou formate la pasul k este egal cu $\frac{1}{2}(A_{k-1} - A_k)$.

1 p

Calcul $S = \frac{1}{2}n(n-1)$.

3 p

PROBLEMA 3 / 4

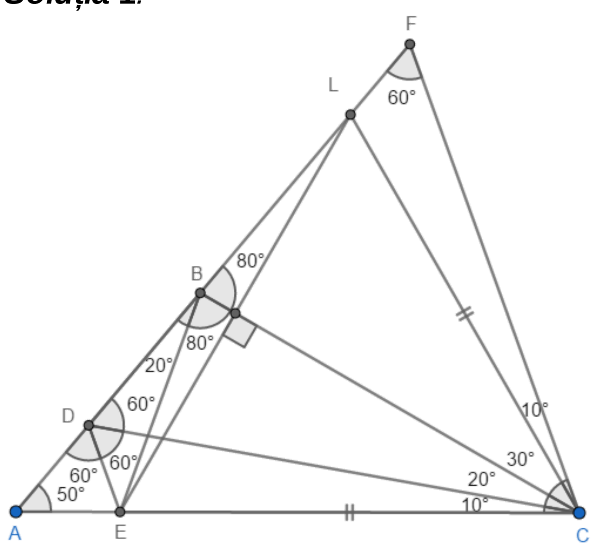
punctaj: 7

Se consideră triunghiul ABC în care $m(\measuredangle BAC) = 50°$ și $m(\measuredangle ACB) = 30°$. Punctele D și E sunt situate pe segmentele (AB), respectiv (AC), astfel încât $m(\measuredangle ACD) = 10°$ și $m(\measuredangle ABE) = 20°$. Aflați $m(\measuredangle ADE)$.

Raspuns corect:

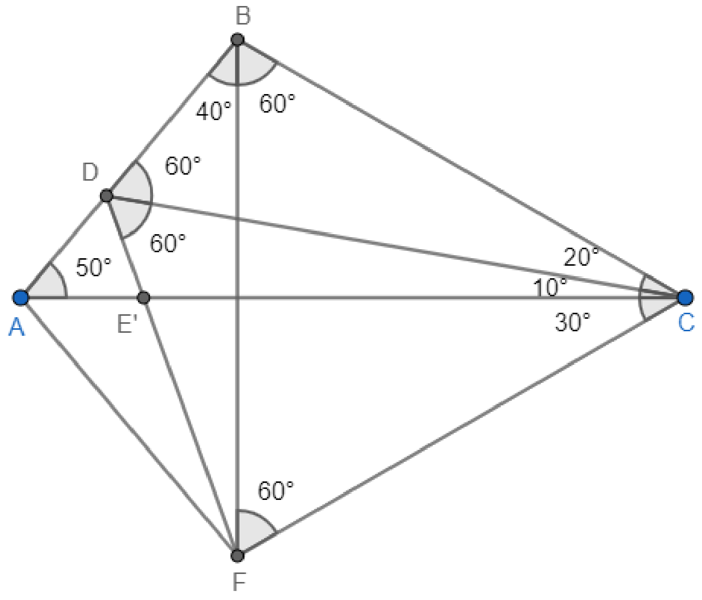
Solutie:

***Soluția* 1**:



$m(\measuredangle BDC) = 60°$ ne sugerează construcția triunghiului echilateral de bază DC. Fie F al treilea vârf al acestui triunghi. Din calcul de unghiuri obținem că $m(\measuredangle EBC) = m(\measuredangle FBC) = 80°$. Construind perpendiculara din E pe BC transformăm dreapta BC în mediatoarea segmentului (EL), unde L este intersecția perpendicularei cu dreapta BF). Triunghiul CLE este echilateral pentru că $(CL) \equiv (CE)$ și $m(\measuredangle LCE) = 60°$. Triunghiurile CLF și CEF sunt congruente (cazul LUL) de unde $m(\measuredangle EDC) = m(\measuredangle LFC) = 60° \Rightarrow m(\measuredangle ADE) = 60°$

Soluția 2:



Construim triunghiul echilateral BCF în semiplanul determinat de dreapta BC și punctul A. Din calcule de unhiuri se obține că patrulaterul BCFD este inscriptibil.

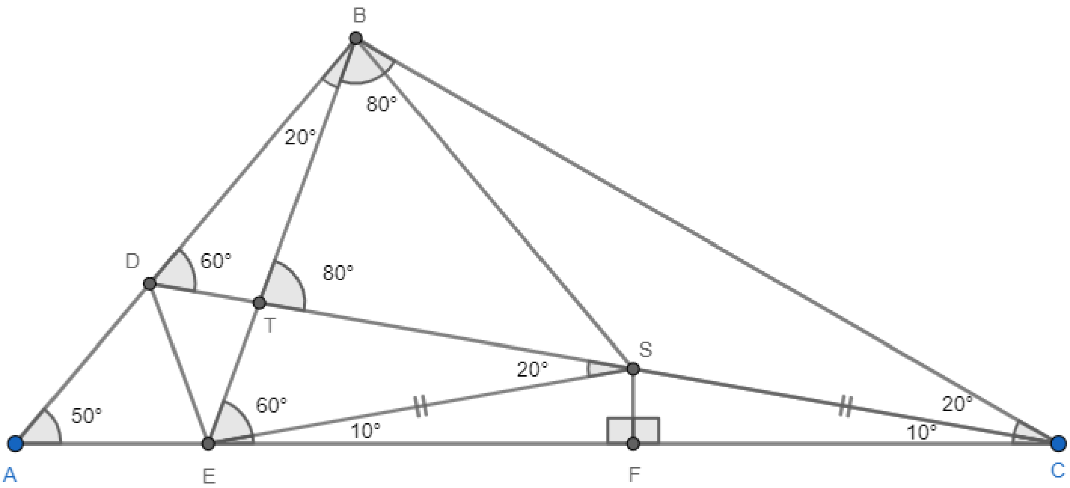
$\Rightarrow m(\measuredangle DFB) = m(\measuredangle DCB) = 20°$.

Dar AC este mediatoarea segmentului [BF]. Dacă $\{E'\} = DF \cap AC \Rightarrow \triangle BE'F$ *este isoscel*

$\Rightarrow m(\measuredangle FBE') = 20°$.

Dar $m(\measuredangle FBE) = m(\measuredangle FBA) - m(\measuredangle ABE) = 40° - 20° = 20° \Rightarrow E = E' \Rightarrow m(\measuredangle ADE) = 60°$.

Soluția 3:



Notăm cu S intersecția mediatoarei segmentului [CE] cu dreapta CD. Din calcul de unghiuri se obține că $m(\measuredangle ESD) = m(\measuredangle EBD) = 20°$

$\Rightarrow$ *patrulaterul DESB este incriptibil.* 1

Din $m(\measuredangle EBC) = \frac{1}{2} m(\measuredangle ESC)$ *și* $S \in$ *mediatoarei segmentului [EC]* $\Rightarrow S$ *este centrul cercului circumscris* $\triangle BEC$.

$m(\measuredangle SBC) = m(\measuredangle SCB) = 20° \Rightarrow m(\measuredangle EBS) = 60°$

Din 1 $\Rightarrow m(\measuredangle EDS) = m(\measuredangle EBS) = 60° \Rightarrow m(\measuredangle ADE) = 60°$.

Barem 1

Construcție $\triangle DCF$ *echilateral.* 1 p

Calcul unghiuri $m(\measuredangle EBC) = m(\measuredangle FBC) = 80°$. 1 p

Construcție perpendiculară din E pe BC și identificare dreaptă BC ca fiind mediatoarea segmentului (EL). 2 p

Demonstrație triunghi CLE echilateral. 1 p

Demonstrație triunghiurile CLF și CEF sunt congruente. 1 p

Calcul $m(\measuredangle ADE)=60°$. 1 p

Barem 2

Construcție triunghi echilateral BCF. 1 p

Demonstrație patrulater BCFD este inscriptibil. 2 p

Identificare AC ca fiind mediatoarea segmentului [BF]. 1 p

Demonstrație $\triangle BE'F$ *isoscel.* 1 p

Demonstrație $E=E'$. 1 p

Calcul $m(\measuredangle ADE)=60°$. 1 p

Barem 3

Construcție mediatoare segment [CE]. 1 p

Demonstrație patrulater DESB este inscriptibil. 2 p

$m(\measuredangle EBC)=\frac{1}{2}m(\measuredangle ESC)$. 1 p

Demonstrație S este centrul cercului circumscris $\triangle BEC$.

1 p

Demonstrație $m(\measuredangle EDS) = m(\measuredangle EBS) = 60°$.

1 p

Calcul $m(\measuredangle ADE) = 60°$.

1 p

PROBLEMA 4 / 4

punctaj: 7

*O mulțime A se numește „**triunghiulară de tip n**” dacă este o submulțime a mulțimii* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *și oricare trei elemente diferite din A sunt laturile unui triunghi nedegenerat.*
*a) Aflați cardinalul maxim al unei mulțimi „**triunghiulare de tip 9**”.*
*b) Aflați cardinalul maxim al unei mulțimi „**triunghiulare de tip 2019**”.*

Raspuns corect:
Solutie:

a) Dacă 1 *ar fi element al unei astfel de mulțimi si a<b alte două elemente se obține că* $a+1 \le b$, *adica* 1, *a și b nu pot fi laturile unui triunghi nedegenerat.*
Pentru 2 *și* 2<a<b<c $\Rightarrow a+2 \le c \Rightarrow 2$ *nu poate aparține unei mulțimi „**triunghiulare**” cu cardinalul mai mare sau egal decât* 4.
La fel 3 *nu poate aparține unei mulțimi „**triunghiulare**” cu cardinalul mai mare sau egal decât* 5.
*Un exemplu de mulțime „**triunghiulară**” de cardinal* 5 *este* $\{4, 5, 6, 7, 8\}$. *Mulțimea* $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *nu este „**triunghiulară**” pentru că* $(4, 5, 9)$ *nu sunt laturile unui triunghi nedegenerat. În concluzie cardinalul maxim al unei mulțimi „**triunghiulare de tip 9**” este* 5.

b) Fie x<y cele mai mici elemente din A. Dacă $z \in A \Rightarrow z < x+y \Rightarrow z \le x+y-1$

- *Dacă* $x+y-1 \le 2019$ *atunci* $A \subseteq \{x, y, y+1, \ldots, x+y-1\} \Rightarrow |A| \le x+1$
  Dar $2x \le x+y-1 \le 2019 \Rightarrow x+1 \le 1010 \Rightarrow |A| \le 1010$
- *Dacă* $x+y-1 > 2019$ *atunci* $A \subseteq \{x, y, y+1, \ldots, 2019\} \Rightarrow |A| \le 2021-y$
  $x+y-1 \ge 2020 \Rightarrow$
  $$\left.\begin{array}{r} x+y \ge 2021 \\ y > x \end{array}\right\} \Rightarrow y \ge 1011$$
  $\Rightarrow 2021-y \le 1010 \Rightarrow |A| \le 1010$

Un exemplu de mulțime cu 1010 *elemente este* $\{1010, 1011, 1012, \ldots, 2019\}$.
*În concluzie cardinalul maxim al unei mulțimi „**triunghiulare de tip 2019**” este* 1010.

Sursa: Olimpiadă Mexic 2017

Barem

a) Eliminare numere 1, 2, 3 *din mulțime.*

1 p

Eliminare mulțime de cardinal 6, *pentru că* $(4, 5, 9)$ *nu sunt laturile unui triunghi nedegenerat.*

1 p

Construcție exemplu de mulțime de cardinal 5.

1 p

---

b) Analiză caz $x+y-1 \leq 2019$ *și demonstrație* $|A| \leq 1010$.

1 p

Analiză caz $x+y-1 > 2019$ *și demonstrație* $|A| \leq 1010$.

1 p

Exemplu și finalizare.

2 p

Total puncte: 28