Concursul de Matematică Upper.School ediția 2019

Etapa III - Clasa a 8-a

Lista de probleme

PROBLEMA 1 / 4 punctaj: 7

În planul α se consideră poligonul convex $[A_1A_2\ldots A_n]$ și punctul M situat în afara planului α. Bisectoarele unghiurilor $\measuredangle A_1MA_2$, $\measuredangle A_2MA_3$, ..., $\measuredangle A_nMA_1$ intersectează segmentele $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_nA_1]$ în punctele M_1, M_2, ..., M_n. Dacă are loc egalitatea $\frac{M_1A_1}{M_1A_2}+\frac{M_2A_2}{M_2A_3}+\ldots+\frac{M_nA_n}{M_nA_1}=n$ să se demonstreze că poligonul $[A_1A_2\ldots A_n]$ este inscriptibil.

Raspuns corect:
Solutie:

Aplicând teorema bisectoarei în fiecare dintre cele n triunghiuri care compun suprafața laterală a piramidei obținem că $\frac{M_1A_1}{M_1A_2}=\frac{MA_1}{MA_2}$, ..., $\frac{M_1A_n}{M_1A_1}=\frac{MA_n}{MA_1}$ (1)

Aplicând $m_a \geq m_g$ *obținem că* $\dfrac{\frac{MA_1}{MA_2}+\frac{MA_2}{MA_3}\ldots+\frac{MA_n}{MA_1}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{MA_1}{MA_2}\cdot\frac{MA_2}{MA_3}\cdot\ldots\cdot\frac{MA_n}{MA_1}}=1$

Din (1) *și relația din ipoteză rezultă ca avem egalitate în inegalitatea de mai sus iar aceasta are loc pentru* $\frac{MA_1}{MA_2}=\frac{MA_2}{MA_3}=\ldots=\frac{MA_n}{MA_1}$ *care este egală cu*

$\frac{MA_1+MA_2+\ldots+MA_n}{MA_2+MA_3+\ldots+MA_1}=1$

$\Rightarrow MA_1=MA_2=\ldots=MA_n$

Dacă O este proiecția vârfului M pe planul α, *triunghiurile dreptunghice* MOA_i, $i=\overline{1,n}$ *sunt congruente (cazul C.I.) pentru că au cateta comună* (MO) *și ipotenuzele* (MA_i) *sunt muchiile laterale ale piramidei. De aici obținem că* $(OA_1)\equiv(OA_2)\equiv\ldots\equiv(OA_n)$ *adică O este centrul cercului circumscris poligonului* $[A_1A_2\ldots A_n]$.

Barem

Aplicarea teoremei bisectoarei și obținerea egalității
$\frac{M_1A_1}{M_1A_2}=\frac{MA_1}{MA_2}$, ..., $\frac{M_1A_n}{M_1A_1}=\frac{MA_n}{MA_1}$.

1 p

Aplicarea inegalității mediilor $m_a \geq m_g$.

2 p

Justificarea cazului de egalitate.

1 p

Demonstrarea congruenței muchiilor laterale.

2 p

Demonstrația fatului că baza unei piramide este poligon inscriptibil dacă muchiile laterale sunt congruente.

1 p

PROBLEMA 2 / 4

punctaj: 7

Găsiți toate tripletele de numere naturale nenule (a, b, c) astfel încât $a^2+b+3=(b^2-c^2)^2$.

Raspuns corect:

Solutie:

Din $a^2+b+3=(b^2-c^2)^2$ *avem că* $a<\left|b^2-c^2\right| \Rightarrow a+1 \leq \left|b^2-c^2\right|$

$a^2+b+3=(b^2-c^2)^2 \geq a^2+2a+1$

$$\Leftrightarrow b+2 \geq 2a \Leftrightarrow a \leq \frac{b+2}{2} \Leftrightarrow$$

$$a^2+b+3 \leq \frac{b^2+4b+4}{4}+b+3 \Leftrightarrow$$

$$(b^2-c^2)^2=a^2+b+3 \leq \frac{b^2+8b+16}{4}=\frac{(b+4)^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\left|b^2-c^2\right| \leq \frac{b+4}{2} \Leftrightarrow |b-c|\cdot|b+c| \leq \frac{b+4}{2}$$

Dacă $b=c \Rightarrow (b^2-c^2)^2=0 \Leftrightarrow a^2+b+3=0$ *imposibil*

Altfel, $|b-c| \geq 1 \Rightarrow b+4 \geq 2b+2c \Leftrightarrow b+2c \leq 4$

Cum b și c $\neq 0 \Rightarrow \boxed{c=1}$, $b \in \{1,2\}$

Întrucât $b \neq c \Rightarrow \boxed{b=2}$

Soluția unică este $(a, b, c)=(2, 2, 1)$

Barem

Demonstrație $a+1 \leq \left|b^2-c^2\right|$.

1 p

Demonstrație $a \le \dfrac{b+2}{2}$.

1 p

Demonstrație $|b-c| \cdot |b+c| \le \dfrac{b+4}{2}$.

2 p

Analiza cazului $b = c$.

1 p

Finalizare si găsire soluție.

2 p

PROBLEMA 3 / 4

punctaj: 7

Numerele naturale a, b, c, d cu $a < b < c < d$ *satsifac egalitatea* $ad = bc$. *Demonstrați că* $\left(\dfrac{a-d}{2}\right)^2 \ge a+2$.

Raspuns corect:

Solutie:

Soluție 1:

Notăm $z = b-a,\ y = c-b,\ x = d-c \Rightarrow d = c+x = b+x+y = a+x+y+z$

$ad = bc \Leftrightarrow a(a+x+y+z) = (a+z)(a+y+z) \Leftrightarrow$

$a^2+ax+ay+az = a^2+ay+az+az+yz+z^2 \Leftrightarrow$

$ax = az+yz+z^2 \Rightarrow a \mid z^2+yz \Rightarrow z^2+yz = a\cdot p$ *și din* $ax = az+yz+z^2 \Rightarrow\ z = x+p$

$$\frac{(a-d)^2}{4} = \frac{(x+y+z)^2}{4} = \frac{(2z+y+p)^2}{4} \ge a+2 = \frac{yz+z^2}{p} + 2 \Leftrightarrow$$

$p(2z+y+p)^2 \ge 4z^2+8p+4yz \Leftrightarrow$

$p(4z^2+y^2+p^2+4yz+4pz+2yp) \ge 4z^2+8p+4yz \Leftrightarrow$

- *Dacă* $p \ge 3$ *atunci*
  $p(4z^2+4yz+\ p^2) \ge 4z^2+8p+4yz$
- *Dacă* $p = 2$ *atunci*
  $4z^2+y^2+p^2+4yz+4pz+2yp =$
  $= 4z^2+y^2+4+4yz+8z+4y \ge 2z^2+4+2yz\ +4z \ge 2z^2+4+2yz+4\ =$
  $= 2z^2+4p+2yz$
- *Dacă* $p = 1$ *inegalitatea se transformă în*
  $y^2+1+4z+2y \ge 8$, *care este adevărată*

Soluție 2:

Notăm $x = b-a,\ y = c-a,\ z = d-a \Rightarrow$

$a(a+z) = (a+x)(a+y) \Rightarrow az = a(x+y)+xy > a(x+y) \Rightarrow z \ge 1+x+y$

$z \geq 1 + x + y \Leftrightarrow a + d \geq b + c + 1$
$4ad \ = \ (a+d)^2 - (a-d)^2 = 4bc \Rightarrow$
$(a-d)^2 = (a+d)^2 - 4bc \geq (a+d)^2 - (b+c)^2 =$
$= (a+b+c+d)(a+d-b-c)$
$a+d-b-c \geq 1$
$a+b+c+d \geq a+a+1+a+2+a+3 = 4a+6$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow (a-d)^2 \geq 4a+6 \\ (a-d)^2 = \text{pătrat perfect} \end{array}\right\} \Rightarrow (a-d)^2 \geq 4a+8 = 4(a+2) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 \geq a+2.$$

Barem 1

Notare $z = b - a$, $y = c - b$, $x = d - c$ *și demonstrație* $a \mid z^2 + yz$. — 2 p

Demonstrație
$p(4z^2 + y^2 + p^2 + 4yz + 4pz + 2yp) \geq 4z^2 + 8p + 4yz$. — 2 p

Analiza cazului $p \geq 3$. — 1 p

Analiza cazului $p = 2$. — 1 p

Analiza cazului $p = 1$. — 1 p

Barem 2

Notarea $x = b - a$, $y = c - a$, $z = d - a$. — 1 p

Demonstrarea inegalității $a + d \geq b + c + 1$. — 2 p

$4ad \ = \ (a+d)^2 - (a-d)^2 = 4bc$. — 1 p

$(a-d)^2 \geq (a+b+c+d)(a+d-b-c)$

$a+d-b-c \geq 1$

$a+b+c+d \geq 4a+6$

2 p

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow (a-d)^2 \geq 4a+6 \\ (a-d)^2 = \textit{pătrat perfect} \end{array}\right\} \Rightarrow (a-d)^2 \geq 4a+8$$

1 p

PROBLEMA 4 / 4

punctaj: 7

*O mulțime M de numere naturale este „**echilibrată”** dacă pentru orice valoare naturală a numărului k, $1 \leq k \leq n$, media aritmetică pentru orice k elemente este un număr natural. Care este cardinalul maxim al unei mulțimi „**echilibrate”** cu toate elementele mai mici sau egale cu 2019? Construiți un exemplu.*

Raspuns corect:

Solutie:

Dacă $M=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ *este o mulțime „**echilibrată”** și* $k \leq n-1$ *atunci*

$a_1+a_2+\dots+a_k \equiv a_1+a_2+\dots+a_{k-1}+a_{k+1} \equiv$

$\equiv \dots \equiv a_1+a_2+\dots+a_{k-1}+a_n \pmod{k}$

Similar $a_1+a_2+\dots+a_k \equiv a_1+a_2+\dots+a_{i-1}+a_{i+1}+\dots+a_{k+1} \pmod{k}$ *pentru fiecare* $i=\overline{1, k-1}$

Așadar $a_1 \equiv a_2 \equiv \dots \equiv a_n \pmod{[1, 2, \dots, n-1]}$

Pentru $n \geq 8$ *avem că* $[1, 2, \dots, n-1] \geq 420$ *și*

$a_1 \geq 1,\ a_2 \geq 421, \dots, a_8 \geq 420 \cdot 7+1 = 2941 > 2019$

Pentru $n=7$ *se obține că* $a_1 \equiv a_2 \equiv \dots \equiv a_7 \pmod{60}$ *și mulțimea*

$\{1, 61, 121, 181, 241, 301, 361\}$ *este un exemplu de mulțime echilibrată de 7 elemente.*

Sursa: Olimpiadă Mexic 2017

Barem

Demonstrație $a_1 \equiv a_2 \equiv \dots \equiv a_n \pmod{[1, 2, \dots, n-1]}$.

4 p

Analiză caz $n \geq 8$.

2 p

Finalizare și exemplu.

1 p

Total puncte: 28