Concursul de Matematica Upper.School editia 2019

Etapa I - Clasa a 5-a

Lista de probleme

PROBLEMA 1 / 10 punctaj: 10

Se consideră numerele

$$a = \underbrace{1111...1}_{2019\ cifre} + \underbrace{2222...2}_{2019\ cifre} + ... + \underbrace{9999...9}_{2019\ cifre}$$

$$b = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{9999...9}_{2018\ cifre} + 2019$$

---

*i) Care este **câtul** impărţirii lui a la b?*

Raspuns corect: 45

punctaj: 5

*ii) Care este **restul** impărţirii lui a la b?*

Raspuns corect: 0

punctaj: 5

Solutie:

$$b = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{9999...9}_{2018\ cifre} + 2019$$

$$\Rightarrow b = 1 + 10 + 100 + ... + 10^{2018}$$

$$\Rightarrow b = \underbrace{1111...1}_{2019\ cifre}$$

$$a = \underbrace{1111...1}_{2019\ cifre} \cdot (1 + 2 + ... + 9) = 45 \cdot b$$

Răspuns:
***i)* 45**
***ii)* 0**

PROBLEMA 2 / 10 punctaj: 10

Care este cel mai mic număr natural de 7 cifre care se termină în 2019 *și se poate scrie ca sumă a nouă numere naturale consecutive?*

Raspuns corect: 1052019
Solutie:

$\overline{abc2019} = (x-4)+(x-3)+\ldots+(x+3)+(x+4)$
$\Rightarrow \overline{abc2019} = 9x \Rightarrow \overline{abc2019} = M_9$
$\Rightarrow (a+b+c+2+0+1+9) \vdots 9$
Pentru ca numarul sa fie minim este necesar ca $a+b+c$ sa fie minim
$\Rightarrow a+b+c=6$
Numarul nimim este 1052019.

Răspuns: 1052019

PROBLEMA 3 / 10

punctaj: 10

Câte numere naturale de trei cifre, nu toate egale, care coincid cu răsturnatele lor, se pot forma folosind cifrele 1, 2, 3, 4, 5*?*

Raspuns corect: 20
Solutie:

Numerele cautate sunt de forma $\overline{aba}$.
Pentru cifra a avem 5 posibilitati diferite de a o completa, iar pentru b avem 4 posibilitati.
Sunt 20 de numere care corespund cerintei.

Răspuns: 20

PROBLEMA 4 / 10

punctaj: 10

Suma a trei numere naturale este 2019*. Dacă împărțim fiecare număr la același număr natural* ***n*** *obținem câturile* 11, 19*, respectiv* 27 *și același rest nenul. Știind că restul este divizibil cu* 3*, să se afle valoarea celui mai mare dintre numere.*

Raspuns corect: 945
Solutie:

$a = 11 \cdot n + r,\ 0 \le r < n$
$b = 19 \cdot n + r,\ 0 \le r < n$
$c = 27 \cdot n + r,\ 0 \le r < n$
$\Rightarrow a+b+c = 57n+3r \Leftrightarrow 2019 = 57n+3r$
$\Rightarrow 57n < 2019 \Rightarrow n \le 35$
Pe de alta parte $57n+3r < 57n+3n = 60n \Rightarrow 2019 < 60n \Rightarrow n \ge 34$
Pentru $n=34$ obtinem $r=27$ iar pentru $n=35$ obtinem $r=8$, care nu este divizibil cu 3.
Asadar, $n=34$ si $r=27$, iar cel mai mare dintre numere este $c = 27 \cdot 34 + 27 = 945$

Răspuns: 945

PROBLEMA 5 / 10

punctaj: 10

Pentru șirul de numere 1, 2, 3, ..., 300 *aplicăm următoarele transformări:*

- *primii trei termeni rămân neschimbați,*
- *pe fiecare dintre următorii trei termeni îi înlocuim cu numărul* 3
- *fiecare din următorii trei termeni rămân neschimbați*
- *pe fiecare dintre următorii trei termeni îi înlocuim cu numărul* 3
- *şi aşa mai departe*

---

i) Câți termeni din noul şir sunt egali cu 3*?*

Raspuns corect: 151

punctaj: 5

ii) Care este suma termenilor din noul şir?

Raspuns corect: 22800

punctaj: 5

Solutie:

i) La fiecare secventa de 6 numere consecutive, incepand cu secventa 1, 2, 3, 4, 5, 6, trei dintre numere se transforma in 3.
$300 = 6 \cdot 50$, adica avem cate 50 de secvente complete de cate 6 numere, fiecare cu cate 3 numere egale cu 3, iar prima secventa contine 4 numere egale cu 3. In total
$50 \cdot 3 + 1 = 151$

ii) In sir raman numerele de forma $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, unde k ia valori de la 0 la 49 si 150 de numere egale cu 3.
Suma este $S = 150 \cdot 3 + (1+295) \cdot 50{:}2 + (2+296) \cdot 50{:}2 + (3+297) \cdot 50{:}2$
$\Rightarrow S = 22800$

Răspuns:
***i)* 151**
***ii)* 22800**

PROBLEMA 6 / 10

punctaj: 10

Un bijutier are câte o greutate de 1g, 2g, 3g, ..., 10g *cu care lucrează. Bijutierul are un cântar cu două talere cu care poate compara greutăți. Spunem că are o reuşită cu* 3 *greutăţi dacă foloseşte* 3 *greutăți care se echilibrează pe cântar. De exemplu, dacă pune o greutate de 10g pe un taler și pe altul una de 4g și una de 6g atunci are o reuşită cu* 3 *greutăţi.*

---

*i) Care este numărul maxim **n** de greutăţi, din cele 10 disponibile, cu care bijutierul poate avea o reuşită cu n greutăţi?*

Raspuns corect: 9

punctaj: 5

ii) Care este numărul total de reuşite cu 3 greutăţi pe care îl poate avea bijutierul?

Raspuns corect: 20

punctaj: 5

Solutie:

i) Suma tuturor greutatilor este $1g+2g+\ldots+10g=55g$ care este numar impar, deci nu se poate obtine o reusita cu 10 greutati.
Pentru $n=9$ exista exemplul $2+3+4+5+6+7=8+9+10$

ii) Reusitele cu 3 greutati sunt:
$1+2=3; 1+3=4; \ldots; 1+9=10$
$2+3=5; 2+4=6; \ldots; 2+8=10$
$3+4=7; 3+5=8; \ldots; 3+7=10$
$4+5=9; 4+6=10$
In total 20 de reusite cu 3 greutati.

Răspuns
***i)* 9**
***ii)* 20**

PROBLEMA 7 / 10

punctaj: 10

Aflați ultimele 4 cifre ale numărului $a=2^{2019}-2^{2013}-2^{2012}$

Raspuns corect: 2000

Solutie:

$a=2^{2012}(2^7-2-1)=2^{2012}\cdot 5^3=2^{2009}\cdot 10^3$
Ultimele 4 cifre sunt 2000.

Răspuns: 2000

PROBLEMA 8 / 10

punctaj: 10

*La împărțirea numărului natural **a** la 16 obținem câtul **c** și restul **r**. Determinați valoarea lui **a**, știind că **r** este număr prim și* $r-c=12$

Raspuns corect: 29

Solutie:

$a = 16c + r,\ 0 \le r < 16;\ r - c = 12$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow 12 \le r < 16 \\ r\ prim \end{array}\right\} \Rightarrow r = 13,\ c = 1,\ a = 29$$

Răspuns: 29

PROBLEMA 9 / 10

punctaj: 10

Care este valoarea numărului $\overline{abc}$, *știind că* $7^a + 5^b + 4^c = 175$?

Raspuns corect: 230

Solutie:

$7^3 = 343 \Rightarrow a \le 2$

- Pentru $a = 1$ ecuatia devine $5^b + 4^c = 168$. Din paritate obtinem ca $c = 0\ \Rightarrow\ 5^b = 167$ care nu are solutii
- Pentru $a = 2$ ecuatia devine $5^b + 4^c = 126$. Din paritate obtinem ca $c = 0\ \Rightarrow\ 5^b = 125 \Rightarrow b = 3$

$\Rightarrow \overline{abc} = 230$

Răspuns: 230

PROBLEMA 10 / 10

punctaj: 10

Pentru fiecare număr natural n, se notează cu $Z(n)$ *numărul de zerouri cu care se termină numărul* $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

*i) Calculați Z(*2019*)-Z(*2009*)*

Raspuns corect: 2

punctaj: 5

*ii) Aflați ultimele 2 cifre ale celui mai mic număr natural n pentru care Z(n+*10*)-Z(n)=*2019

Raspuns corect: 15

punctaj: 5

Solutie:

$i)\ 2009! = 2^a \cdot 5^b \cdot m;\ (m, 5) = 1$

$2019! = 2^c \cdot 5^{b+2} \cdot n;\ (n, 5) = 1;\ c > a$
De la 2009 la 2019 mai apar în plus doi factori de 5 (la 2010 și la 2015), iar aceștia aduc în plus două zerouri la finalul numărului.
$\Rightarrow Z(2019) - Z(2009) = 2$

$ii)\ Z(n+10) - Z(n) = p$, unde p este puterea maximă a lui 5 care apare în produsul $(n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+10)$
Valoarea minimă a lui n este $n = 5^{2018} - 10$ pentru că $n + 10 = 5^{2018}$ și $n + 5 = 5^{2018} - 5$ care este divizibil cu 5, dar nu și cu pătratul acestuia.
Ultimele 2 cifre ale numărului n sunt 15.

Răspuns:
***i*) 2**
***ii*) 15**

Total puncte: 100