Concursul de Matematica Upper.School editia 2019

Etapa I - Clasa a 6-a

Lista de probleme

PROBLEMA 1 / 10 **punctaj: 10**

Care este cel mai mare număr natural $\overline{ab}$ care verifică $\overline{ab}^3 = (2a+b)^n$, unde n este număr natural nedivizibil cu 3?

Raspuns corect: 32
Solutie:

$\overline{ab}^3$ este cub perfect de aici si $(2a+b)^n$ este cub perfect. Dar n este nedivizibil cu 3
$\Rightarrow 2a+b$ este cub perfect.
Cum $2a+b \leq 27 \Rightarrow 2a+b \in \{1, 8, 27\}$.

- Pentru $2a+b=1 \Rightarrow a=0$ *si* $b=1$ care nu convine
- Pentru $2a+b=8$ obtinem solutia maxima $\overline{ab}=32$
- Pentru $2a+b=27$ nu avem solutii

Răspuns: 32

PROBLEMA 2 / 10 **punctaj: 10**

Fie $a \in \mathbb{N}$, a impar si mulţimea M_a={(p,q)/p şi q sunt numere naturale prime, p+q=$\overline{aaa}$}.
Câte elemente are mulţimea $M_1 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_7 \cup M_9$?

Raspuns corect: 6
Solutie:

Cum $\overline{aaa}$ este un numar natural impar, iar p si q sunt numere prime obtinem ca
$p=2$ *sau* $q=2$
$2+q \in \{111, 333, 555, 777, 999\} \Leftrightarrow$
$q \in \{109, 331, 553, 775, 997\}$
Dar $553 = M_7$ *si* $775 = M_5$
Numarul perechilor ordonate este sase: $(2, 109)$, $(2, 331)$, $(2, 997)$,
$(109, 2)$, $(331, 2)$, $(997, 2)$

Răspuns: 6

PROBLEMA 3 / 10

punctaj: 10

Numerele naturale x şi y verifică relaţia $\frac{2xy}{2x+1}=y^2-7$

Care este valoarea expresiei x^2+y^2 ?

Raspuns corect: 10

Solutie:

Pentru ca $\frac{2xy}{2x+1}\geq 0 \Rightarrow y^2\geq 7 \Rightarrow y\geq 3$ (1)

Dar $2xy<2xy+y \Rightarrow 2xy<y(2x+1)\Rightarrow$

$\frac{2xy}{2x+1}<y \Rightarrow y^2-7<y \Leftrightarrow$

$y(y-1)<7 \Rightarrow y\leq 3$ (2)

Din (1) *si* (2) obtinem ca $y=3$ *si* $x=1$

$\Rightarrow x^2+y^2=10$

Răspuns: 10

PROBLEMA 4 / 10

punctaj: 10

Un joc pentru copii are cartonaşe cu 3 *puncte si cartonaşe cu* 5 *puncte. Jocul se termină atunci când jucătorul acumulează exact* 2019 *puncte.*

---

i) Care este ***numărul minim*** *de cartonaşe cu care jucătorul acumulează exact* 2019 *puncte?*

Raspuns corect: 405

punctaj: 5

ii) Care este ***numărul maxim*** *de cartonaşe cu care jucătorul acumulează exact* 2019 *puncte?*

Raspuns corect: 673

punctaj: 5

Solutie:

i) $3x+5y=2019 \Leftrightarrow 5(x+y)=2019+2x$

$x+y$ ia valoarea minima atunci cand x este minim. $2019+2x=M_5 \Rightarrow x=3$ *si* $y=402$

$\Rightarrow x+y=405$

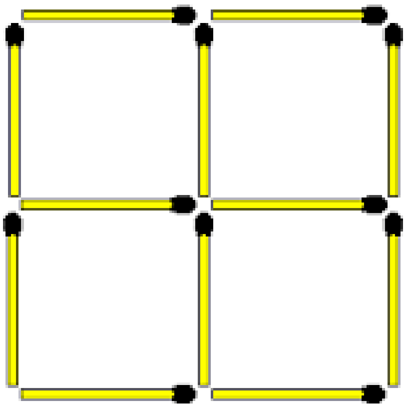
ii) $3x+5y=2019 \Leftrightarrow 3(x+y)+2y=2019$
$x+y$ ia valoare maxima atunci cand y este minim. Adica $y=0$ *si* $x=673$
$\Rightarrow x+y=673$

Răspuns:
***i)* 405**
***ii)* 673**

PROBLEMA 5 / 10

punctaj: 10

Cu 12 chibrituri construim un pătrat 2×2 *care conţine* $2^2=4$ *pătrăţele mici (ca în figura alăturată). Câte chibrituri sunt necesare pentru a construi un pătrat* 100×100 *care să conţină* $100^2=10000$ *de pătrăţele mici?*



Raspuns corect: 20200
Solutie:

Pe fiecare linie și pe fiecare coloană se folosesc câte 100 de chibrituri. Pătratul 100×100 conține 101 linii și 101 coloane. Numărul total de chibrituri este egal cu
$101\cdot100+101\cdot100=20200$

Răspuns: 20200

PROBLEMA 6 / 10

punctaj: 10

Dacă a, b, c sunt numere raţionale pozitive, astfel încât:

$$\frac{2a}{3b+4c}=\frac{3b}{2a+4c}=\frac{4c}{2a+3b}$$

Calculaţi valoarea expresiei $(a+3b+2c)\cdot(\frac{1}{a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{2c})$

Raspuns corect: 10
Solutie:

$$\frac{2a}{3b+4c}=\frac{3b}{2a+4c}=\frac{4c}{2a+3b}=\frac{2a+3b+4c}{4a+6b+8c}=\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}4a=3b+4c\\6b=2a+4c\end{array}\right\}\Rightarrow 4a-6b=3b-2a$$

$$\Leftrightarrow 6a=9b \Leftrightarrow a=\frac{3b}{2} \text{ si } c=\frac{3b}{4}$$

$$\Rightarrow (a+3b+2c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{2c}\right)=6b\cdot\frac{5}{3b}=10$$

Răspuns: 10

PROBLEMA 7 / 10

punctaj: 10

Se consideră fracţiile $\frac{1}{n}$ *și* $\frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Determinaţi cel mai mic **n** ştiind că între cele 2 fracţii există exact* 35 *de fracţii diferite cu numărătorul* 3.

Raspuns corect: 4

Solutie:

$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}$. Cautam fractiile $\frac{1}{n^2}<\frac{3}{n_1}<\frac{3}{n_2}<\ldots<\frac{3}{n_{35}}<\frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \frac{3}{3n^2}<\frac{3}{n_1}<\frac{3}{n_2}<\ldots<\frac{3}{n_{35}}<\frac{3}{3n}$$

$$\Rightarrow 3n<n_{35}<n_{34}<\ldots<n_2<n_1<3n^2$$

Intre $3n$ *si* $3n^2$ exista exact 35 de numere naturale pentru $n=4$, si anume:

$3\cdot4<13<14<15<\ldots<47<3\cdot16$

Se obtin fractiile: $\frac{3}{13},\frac{3}{14},\ldots,\frac{3}{47}$

Răspuns: 4

PROBLEMA 8 / 10

punctaj: 10

Care sunt ultimele 4 *cifre ale numărului* $a=2^{2019}-2^{2013}-2^{2012}$?

Raspuns corect: 2000

Solutie:

$a=2^{2012}(2^7-2-1)=2^{2012}\cdot5^3=2^{2009}\cdot10^3$

Ultimele 4 cifre sunt 2000.

Răspuns: 2000

PROBLEMA 9 / 10

punctaj: 10

Cinci piraţi găsesc o pungă plină de galbeni. Cel mai voinic ia 81 *de galbeni, iar ceilalţi patru iau sume oarecare, mai mici. Ivindu-se neînţelegeri între ei, cel ce luase* 81 *de galbeni dublează numărul galbenilor celorlalţi patru şi la fel procedează în continuare, pe rând fiecare dintre cei rămaşi, fiecare o singură dată.*
După ce şi al cincilea pirat va fi dublat sumele celorlalţi patru ei observă că au acelaşi număr de galbeni.
Câţi galbeni erau in pungă?

Raspuns corect: 160
Solutie:

La final fiecare are aceeasi suma de bani. Pe rand sunt marcati cu simbolul $\rceil$ piratii care dubleaza suma celorlalti.

$$
\begin{array}{ccccc}
a & a & a & a & a \\
\overline{3a}\rvert & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\
\frac{3a}{2} & \overline{\frac{11a}{4}}\Big\rvert & \frac{a}{4} & \frac{a}{4} & \frac{a}{4} \\
\frac{3a}{4} & \frac{11a}{8} & \overline{\frac{21a}{8}}\Big\rvert & \frac{a}{8} & \frac{a}{8} \\
\frac{3a}{8} & \frac{11a}{16} & \frac{21a}{16} & \overline{\frac{41a}{16}}\Big\rvert & \frac{a}{16} \\
\frac{3a}{16} & \frac{11a}{32} & \frac{21a}{32} & \frac{41a}{32} & \overline{\frac{81a}{32}}\Big\rvert
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \frac{81a}{32} = 81 \Rightarrow a = 32$$

Punga are $32 \cdot 5 = 160$ galbeni

Răspuns: 160

PROBLEMA 10 / 10

punctaj: 10

Se consideră mulţimile $A = \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{N}$ *şi* $S = \{s \in \mathbb{N} / s = x + y,\ x \in A,\ y \in A,\ x \neq y\}$.
*Se ştie că S={*23, 288, 289, 290, 555*}.*
Care este cel mai mare element al mulţimii A?

Raspuns corect: 278
Solutie:

Presupunem fara a restrange generalitatea ca $a < b < c < d$.
$\Rightarrow a + b < a + c < b + c < b + d < c + d$
$\Rightarrow a + b = 23;\ a + c = 288;\ b + c = 289;\ b + d = 290;\ c + d = 555$
Se obtine ca multimea ca $A = \{11, 12, 277, 278\}$

Răspuns: 278

Total puncte: 100