Concursul de Matematica Upper.School editia 2019

Etapa I - Clasa a 7-a

Lista de probleme

PROBLEMA 1 / 10 **punctaj: 10**

Daniel se joacă cu plăci dreptunghiulare cu dimensiunile 6cm *x* 15cm*. Pune plăcile una lângă alta astfel încât să nu fie spaţiu între ele şi să nu se suprapună una peste cealaltă.*

---

i) Câţi cm are lungimea laturii pătratului format din 90 *astfel de plăci?*

Raspuns corect: 90

punctaj: 5

ii) Care este numărul minim de plăci de care are Daniel nevoie ca să poată forma un pătrat?

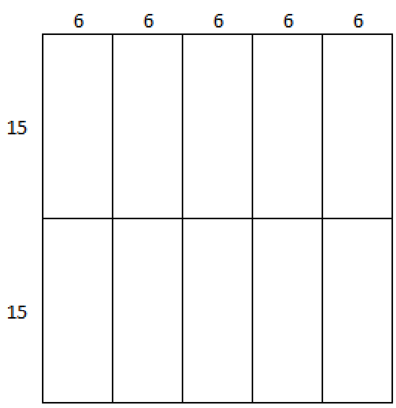
Raspuns corect: 10

punctaj: 5

Solutie:

i) Aria unei placi este de 90 cm^2. Folosind 90 astfel de placi se obtine un patrat cu suprafata de $90 \cdot 90\ cm^2 = 90^2\ cm^2$. De aici deducem ca latura patratului este de 90 cm.

ii) Daca n este numarul minim de placi pentru a forma un patrat atunci $90 \cdot n$ este un patrat perfect $\Rightarrow n = 10k^2$. Pentru n=10 se poate realiza urmatoarea configuratie:



Răspuns:
i) **90**
ii) **10**

PROBLEMA 2 / 10

punctaj: 10

Care este valoarea expresiei $|m+n|$ *unde numerele întregi m și n verifică ecuația* $(9m-\sqrt{729})^2+|18n+\sqrt{1296}|=0$?

Raspuns corect: 1

Solutie:

$9m=\sqrt{729}=27 \Rightarrow m=3$

$18n=-\sqrt{1296}=-36 \Rightarrow n=-2$

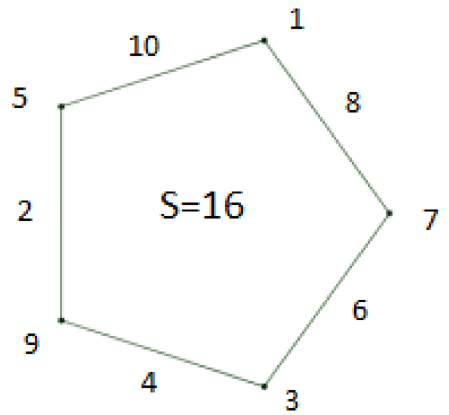
$|m+n|=1$

Răspuns: 1

PROBLEMA 3 / 10

punctaj: 10

Putem așeza în mai multe moduri în vârfurile și pe laturile unui pentagon numerele de la 1 *la* 10*, astfel încât suma celor 3 numere corespunzătoare fiecăreia dintre cele* 5 *laturi să fie aceeași. Notăm cu S suma numerelor de pe o latură a unei astfel de aranjări. Un exemplu de aranjare apare în figura de mai jos.*



Care este cea mai mică valoare posibilă pentru S?

Raspuns corect: 14

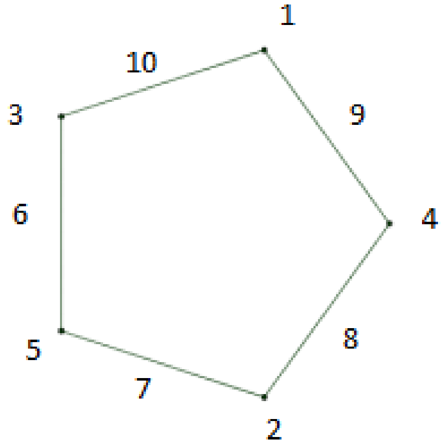
Solutie:

Notam cu V suma numerelor din vârfurile pentagonului.

$5S=1+2+\ldots+10+V$

$\Rightarrow 5S=55+V$. Cea mai mică valoare posibilă pentru V *este* $V=1+2+\ldots+5=15$

$\Rightarrow 5S\geq 55+15 \Rightarrow S\geq 14$. Pentru S=14 avem soluția din figura de mai jos:



Răspuns: 14

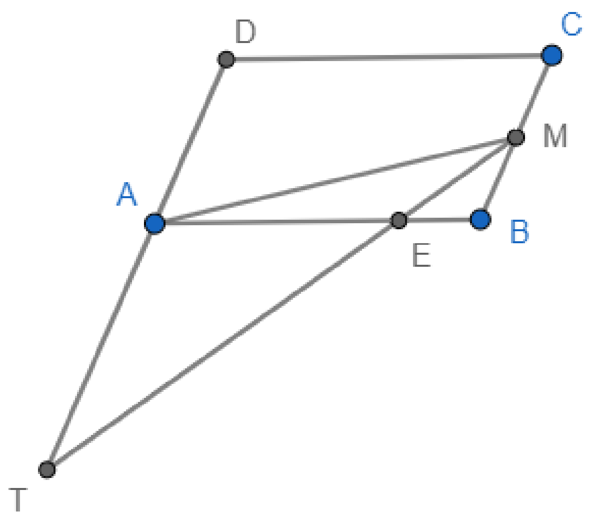
PROBLEMA 4 / 10

punctaj: 10

ABCD este un paralelogram de arie $32cm^2$. *Fie* $E \in (AB)$ *astfel încât* $AE = 3BE$ *si M mijlocul segmentului (BC). Dreapta EM intersecteaza AD in T. Calculați aria* ΔATE.

Raspuns corect: 18

Solutie:



$$\frac{A_{AMB}}{A_{MEB}} = \frac{AB}{EB} = 4 \; (1)$$

$$A_{AMB} = \frac{1}{2} A_{ABC} = \frac{1}{4} A_{ABCD} = 8\ cm^2 \; (2)$$

$$Din\ (1)\ si\ (2) \Rightarrow A_{MEB} = 2\ cm^2$$

$$AT \parallel MB \xrightarrow{TFA} \triangle AET \sim \triangle BEM$$

$$\frac{A_{AET}}{A_{BEM}} = \left(\frac{AE}{BE}\right)^2 = 9 \Rightarrow A_{AET} = 18\ cm^2$$

Răspuns: 18

PROBLEMA 5 / 10

punctaj: 10

Care este cel mai mare număr natural de două cifre $\overline{ab}$, cu a<b pentru care numărul

$\sqrt{14(a+b)-\overline{ba}-\overline{ab}} \in \mathbb{N}$?

Raspuns corect: 57

Solutie:

$\sqrt{14(a+b)-\overline{ba}-\overline{ab}} = \sqrt{3(a+b)} = k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 3(a+b)$ este patrat perfect

$$\left.\begin{array}{r} a+b=3k^2 \\ a<b \Rightarrow a+b<18 \end{array}\right\} \Rightarrow k^2<6 \Rightarrow k^2 \in \{1, 4\}$$

Convine $a+b=12$ *si* $\overline{ab}=57$

Răspuns: 57

PROBLEMA 6 / 10

punctaj: 10

Se consideră mulțimile:

$$A=\left\{x\in\mathbb{N}\;\middle|\;\begin{array}{l} x=2019\cdot 2020-a; \\ a\in\mathbb{N};\, 0\le a\le 2022 \end{array}\right\}$$

și

$$B=\left\{x\in\mathbb{N}\;\middle|\;\begin{array}{l} x=2019\cdot 2020+a; \\ a\in\mathbb{N};\, 0\le a\le 2025 \end{array}\right\}$$

Câte pătrate perfecte conține mulțimea $A \cup B$?

Raspuns corect: 2

Solutie:

$A=\{2019^2+2019,\ 2019^2+2018,\ \ldots,\ 2019^2-3\}$

$2019^2+2019<2019^2+2\cdot 2019+1=(2019+1)^2=2020^2$

$\Rightarrow A$ contine doar un patrat perfect 2019^2

$B=\{2020^2-2020,\ 2020^2-2019,\ \ldots,\ 2020^2+5\}$

$2020^2-2020=2020\cdot 2019>2019^2$

$\Rightarrow B$ contine doar un patrat perfect 2020^2

$\Rightarrow A\cup B$ contine doar doua patrate perfecte 2019^2 *si* 2020^2

Răspuns: 2

PROBLEMA 7 / 10

punctaj: 10

Doi copii iau pe rând bomboane dintr-un pachet. Primul ia o bomboană, al doilea două, apoi primul trei, al doilea patru și așa mai departe. Când numărul de bomboane rămase în pachet este insuficient, atunci cel căruia îi vine rândul ia toate bomboanele. Câte bomboane au fost la început in pachet, dacă primul copil ia 101 *bomboane?*

Raspuns corect: 211

Solutie:

Primul copil ia $1+3+5+\ldots+(2k-1)+x$, *unde* $0 \le x < 2k-1$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} k^2+x=101 \\ x<2k+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 101 < k^2+2k+1$$

$101 < (k+1)^2 \Rightarrow k \ge 10$

dar $k^2 \le 101 \Rightarrow k \le 10 \Rightarrow k=10$ *si* $x=1$

numarul total de bomboane este $1+2+\ldots+20+1=211$

Răspuns: 211

PROBLEMA 8 / 10

punctaj: 10

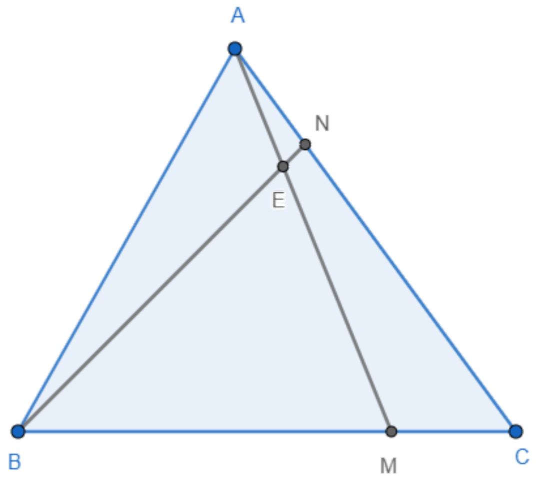
În triunghiul $\triangle ABC$ *considerăm punctele* $M \in (BC)$ *si* $N \in (AC)$*, astfel încât* $MC = \dfrac{BC}{3}$ *și*

$AN = \dfrac{AC}{4}$.

Dacă $AM \cap BN = \{E\}$*, calculați valoarea lui x din expresia* $x \cdot AE = ME$.

Raspuns corect: 2

Solutie:



Se aplica teorema lui Menelaus in $\triangle AMC$ cu tranversala $N-E-B$

$$\Rightarrow \frac{AN}{NC} \cdot \frac{BC}{BM} \cdot \frac{ME}{EA} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{AN}{AC} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{BC}{MC} = 3 \Leftrightarrow \frac{BC}{BC-MC} = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{BC}{BM} = \frac{3}{2} \quad (3)$$

$$\text{Din } (1), (2) \text{ si } (3) \Rightarrow \frac{AE}{ME} = \frac{1}{2} \Rightarrow ME = 2 \cdot AE \Rightarrow x = 2$$

Răspuns: 2

PROBLEMA 9 / 10

punctaj: 10

Care este valoarea numărului natural scris în baza 10, $\overline{abcd}$, care verifică relația $(a+b+c+d)^4=\overline{abcd}$?

Raspuns corect: 2401

Solutie:

$5^4=625$ prea mic.

$6^4=1296$, $7^4=2401$ $(convine)$, $8^4=4096$, $9^4=6561$, $10^4=10000$ prea mare

Singura solutie este $\overline{abcd}=2401$

Răspuns: 2401

PROBLEMA 10 / 10

punctaj: 10

Fie $(a,b,c)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$*, unul dintre tripletele de numere întregi cu proprietatea că* $ab=c^2+2017+c(a-b)$.

Calculați valoarea absolută a sumei numerelor a și b.

Raspuns corect: 2018

Solutie:

Ecuatia se rescrie:

$ab-ac+bc-c^2=2017$

$\Leftrightarrow a(b-c)+c(b-c)=2017$

$(b-c)(a+c)=2017$

Cum 2017 este numar prim avem variantele $b-c=\pm1$ *si* $a+c=\pm2017$ sau $b-c=\pm2017$ *si* $a+c=\pm1$

Prin adunarea celor 2 relatii se obtine ca $a+b=\pm(2017+1)=\pm2018$

$|a+b|=2018$

Răspuns: 2018

Total puncte: 100