Concursul de Matematica Upper.School editia 2019

Etapa I - Clasa a 8-a

Lista de probleme

PROBLEMA 1 / 10 punctaj: 10

Numerele reale x, y, z verifică relațiile $x+y+z=6$ *și* $xy+yz+zx=12$.
Care este valoarea produsului $x \cdot y \cdot z$?

Raspuns corect: 8
Solutie:

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$
$$\Rightarrow 36 = x^2+y^2+z^2+24 \Rightarrow$$
$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 12 \\ dar\ xy+yz+zx &= 12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$$x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x=y=z \Rightarrow x=y=z=2$$
$$\Rightarrow xyz = 8$$

Răspuns: 8

PROBLEMA 2 / 10 punctaj: 10

Numerele $6n+7$ *și* $9n+1$ *sunt pătrate perfecte consecutive* $(n \in \mathbb{N})$.
Care este valoarea numărului n?

Raspuns corect: 7
Solutie:

Pentru $n \geq 3$ avem ca 9n+1>6n+7

$$\left.\begin{aligned} 6n+7 &= a^2 \\ 9n+1 &= (a+1)^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$
$$\left.\begin{aligned} 18n+21 &= 3a^2 \\ 18n+2 &= 2a^2+4a+2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$
$$19 = a^2-4a-2 \quad \Big| +6 \ \Leftrightarrow 25 = (a-2)^2$$
$$a-2 \in \{-5, 5\} \Rightarrow a \in \{-3, 7\}$$
$$a \in \mathbb{N} \Rightarrow a=7 \ si \ n=7.$$

Cazurile $n \leq 2$ nu aduc solutii.

Răspuns: 7

PROBLEMA 3 / 10

punctaj: 10

Care este suma părților întregi ale soluțiilor raționale ale ecuației
$(x^2-x-5)^3+(2x^2-x-11)^3=(3x^2-2x-16)^3$?

Raspuns corect: 0

Solutie:

$a=(x^2-x-5),\ b=(2x^2-x-11)$

Ecuatia se rescrie: $a^3+b^3=(a+b)^3 \Leftrightarrow 3ab(a+b)=0 \Leftrightarrow$

$3(x^2-x-5)(2x^2-x-11)(3x^2-2x-16)=0$

De aici obtinem ca $x^2-x-5=0$ sau $2x^2-x-11=0$ sau $3x^2-2x-16=0$

Doar ultima ecuatie are solutii rationale $x_1=\frac{8}{3}$ *si* $x_2=-2$

$\Rightarrow \left[\frac{8}{3}\right]+[-2]=0$

Răspuns: 0

PROBLEMA 4 / 10

punctaj: 10

In cubul $ABCDA'B'C'D'$ ***de muchie 6*** *se consideră punctele M si N mijloacele muchiilor* (AB)*, respectiv* (CC'). *Notăm cu* $\{P\}=DB\cap CM$ *și cu* $\{Q\}=BN\cap B'C$.

---

i) Calculați pătratul distanței de la punctul A' *la dreapta de intersecție a planelor* (BDQ) *și* $(AB'D)$

Raspuns corect: 72

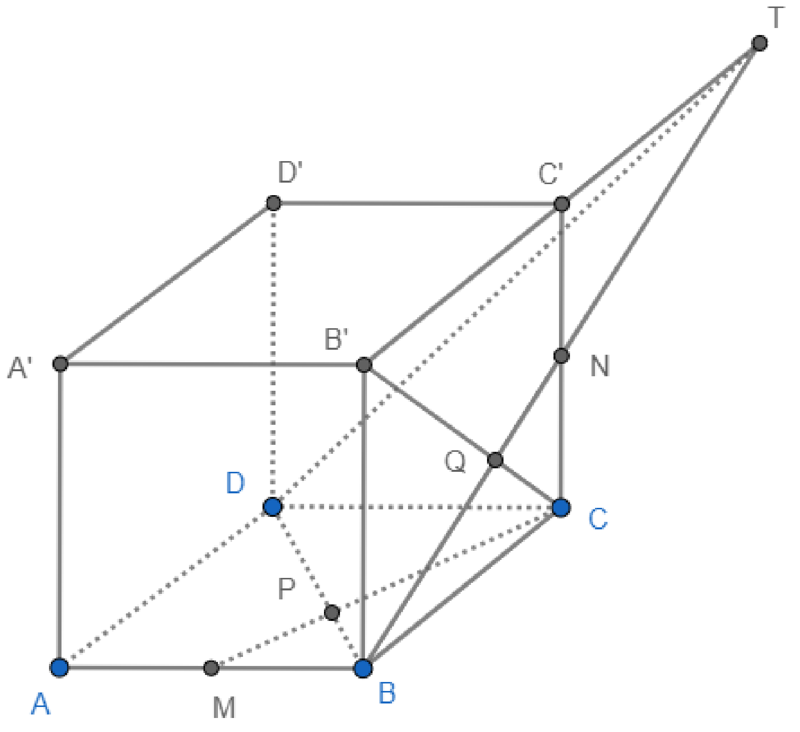
punctaj: 5

ii) Calculați măsura unghiului dintre dreptele PQ și $A'D$.

Raspuns corect: 90

punctaj: 5

Solutie:



i) Notam cu T intersectia dreptelor BN si $B'C'$. Planul (BDQ) este planul determinat de dreptele BD si BN, iar planul $(AB'D)$ este planul determinat de dreptele AD si $B'C'$. Punctele D si T fac parte din ambele plane, asadar dreapta lor de intersectie este DT.

In $\triangle BB'T$ avem: $C'N \parallel BB'$ si $C'N = \dfrac{BB'}{2} \Rightarrow (C'N)$ este linie mijlocie in $\triangle TBB' \Rightarrow (C'T) \equiv (B'C')$. Lipim de cub un alt cub pe fata $DCC'D'$. DT este diagonala in noul cub.

$\Rightarrow DT = 6\sqrt{3}\,cm$. $A'T$ se calculeaza cu teorema lui Pitagora in $\triangle A'B'T$ si obtinem $A'T = 6\sqrt{5}\,cm$.

$A'D = 6\sqrt{2}\,cm$.

$A'D^2 + DT^2 = A'T^2 \Rightarrow$ (reciproca teoremei lui Pitagora) $\triangle A'DT$ este dreptunghic, adica $A'D \perp DT$

$d^2(A', DT) = A'D^2 = 72cm$

ii) $\triangle BDT$ *este dreptunghic (din acelasi motiv), de unde* $DT \perp DB$; $DT \perp A'D$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow DT \perp (A'DB)\\ A'D \subset (A'DB)\end{array}\right\} \Rightarrow DT \perp A'D$$

Se demonstreaza usor (cu reciproca teoremei lui Thales) ca $PQ \parallel DT$. *Asadar* $\sphericalangle(A'D, PQ) = \sphericalangle(A'D, DT)$. *Masura unghiului cautat este de* $90°$.

Răspuns:
i) **72**
ii) **90**

PROBLEMA 5 / 10

punctaj: 10

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $a = b - 1$ *și* $b \in [1,3]$.
Fie $E(a,b) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2b + 1} + \sqrt{a^2 + b^2 - 6b - 4a + 13}$.
Să se calculeze pătratul expresiei $E(a,b)$

Raspuns corect: 8
Solutie:

Substituind in expresie pe b cu a+1 obtinem:
$E^2(a,b)=\left(\sqrt{2a^2}+\sqrt{2(a-2)^2}\right)^2$
Cum $1\leq b\leq 3 \Leftrightarrow 1\leq a+1\leq 3$ obtinem ca $a\in[0,\ 2]$
$E^2(a,\ b)\ =\ (\sqrt{2}\cdot a+\sqrt{2}\cdot(2-a))^2$
$E^2(a,\ b)\ =\ (\sqrt{2}(a+2-a))^2$
$\Rightarrow E^2(a,b)=8$

Răspuns: 8

PROBLEMA 6 / 10

punctaj: 10

Pe o tablă sunt scrise numerele 1,2,3,...,10. *O operație constă în alegerea a trei dintre ele și mărirea fiecăruia cu* 1. *Care este* ***numărul minim*** *de operații pe care trebuie să le efectuăm pentru a obține toate numerele egale?*

Raspuns corect: 15
Solutie:

Cea mai mica suma pe care o putem obtine este $10\cdot 10=100$. Suma initiala este 55. Deci numarul minim de operatii este 15.
Un exemplu este urmatorul:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7 *op*	8	9	10	4	5	6	7	8	9	10
1 *op*	9	10	10	4	5	6	7	9	9	10
1 *op*	10	10	10	4	5	6	7	10	10	10
2 *op*	10	10	10	6	7	6	9	10	10	10
1 *op*	10	10	10	7	7	7	10	10	10	10
3 *op*	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Răspuns: 15

PROBLEMA 7 / 10

punctaj: 10

Numerele a,b,c *sunt elemente diferite ale mulțimii* $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 2019\}$.
Determinați numărul tuturor tripletelor ordonate diferite (a,b,c) *cu proprietatea că suma* $a+b+c$ *este un multiplu al fiecăruia dintre numerele* a,b,c.

Raspuns corect: 4038
Solutie:

Ne propunem să aflăm numărul tripletelor (a, b, c) pentru care $a<b<c$
$c \mid a+b+c \Rightarrow c \mid a+b$. Dar $a+b<2c \Rightarrow a+b=c \Rightarrow b=c-a$
$b \mid a+b+c \Rightarrow b \mid a+c$. Dar $b \mid c-a \Rightarrow b \mid 2a$. Cum $b>a \Rightarrow b=2a$ *si* $c=3a$
Tripletele sunt de forma $(a, 2a, 3a)$
$2019 = 3\cdot 673 \Rightarrow$ avem 673 triplete pentru care $a<b<c$
$\Rightarrow$ Numărul tripletelor ordonate este $673\cdot 3! = 673\cdot 6=4038$

Răspuns: 4038

PROBLEMA 8 / 10

punctaj: 10

Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ care satisfac condițiile:
$xzy \neq 0$, $x+y+z=0$ *și* $x^2+y^2+z^2=1$
Care este valoarea fracției $\dfrac{x^4+y^4+z^4}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$?

Raspuns corect: 2
Solutie:

$0=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=$
$=1+2(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx=-\dfrac{1}{2}$. Atunci $\dfrac{1}{4}=(xy+yz+zx)^2=$
$=\sum\limits_{cyc} x^2y^2+2\sum\limits_{sym} x^2yz=\sum\limits_{cyc} x^2y^2+2xyz\sum\limits_{cyc} x=\sum\limits_{cyc} x^2y^2$
Pe de alta parte:
$1=(x^2+y^2+z^2)^2 = \sum\limits_{cyc} x^4+2\sum\limits_{cyc} x^2y^2=\sum\limits_{cyc} x^4+\dfrac{1}{2} \Rightarrow \sum\limits_{cyc} x^4=\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{x^4+y^4+z^4}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{4}=2$

Răspuns: 2

PROBLEMA 9 / 10

punctaj: 10

a, b, c sunt numere raționale, $b \neq 0$ și verifică relația $\dfrac{a+b\sqrt{3}}{b+c\sqrt{2}}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}$. *Care este produsul lor?*

Raspuns corect: 0
Solutie:

$\dfrac{a+b\sqrt{3}}{b+c\sqrt{2}}=2\sqrt{3}-\sqrt{6} \Leftrightarrow (b-2c)(\sqrt{3}-\sqrt{6})=a$. Cum $a\in\mathbb{Q} \Rightarrow (b-2c)(\sqrt{3}-\sqrt{6})\in\mathbb{Q}$.
Dar $(\sqrt{3}-\sqrt{6})\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow b-2c=0$ *si* $a=0 \Rightarrow abc=0$

Răspuns: 0

PROBLEMA 10 / 10

punctaj: 10

Câte perechi de numere întregi (x, y) *verifică relația* $x^2+2(y^2-xy-y-1)=2^{2019}$?

Raspuns corect: 0

Solutie:

Ecuatia se rescrie: $(x-y)^2+(y-1)^2=4\cdot 2^{2017}+3$. Dar suma a doua patrate perfecte nu poate fi M_4+3

Răspuns: 0

Total puncte: **100**