Concursul de Matematică Upper.School ediția 2019

Etapa II - Clasa a 5-a

Lista de probleme

PROBLEMA 1 / 10 punctaj: 10

Numerele naturale a, b, $\overline{ab}$, $\overline{ba}$, $\overline{aba}$ *şi* $\overline{bab}$ *au media aritmetică* 123. *Care este valoarea lui x, unde* $x = a + b$?

Raspuns corect: 6

Solutie:

$S = a + b + \overline{ab} + \overline{ba} + \overline{aba} + \overline{bab} =$
$= a + b + 10a + b + 10b + a + 100a + 10b + a + 100b + 10a + b =$
$= 123a + 123b.$

Media aritmetică a celor 6 *numere este* $\frac{S}{6} = 123 \Rightarrow S = 6 \cdot 123 \Rightarrow \boxed{a + b = 6} \Rightarrow \boxed{x = 6}$

Răspuns: **6**

PROBLEMA 2 / 10 punctaj: 10

Numărul 2019 *are proprietatea că una dintre cifrele sale este pătratul sumei celorlalte cifre.*

---

a) Care este cel mai mare număr natural de trei cifre cu această proprietate?

Raspuns corect: 930

punctaj: 2

b) Care este cel mai mic număr de patru cifre cu această proprietate?

Raspuns corect: 1001

punctaj: 3

c) Câte numere de patru cifre au această proprietate?

Raspuns corect: 46

punctaj: 5

Solutie:

$a=(b+c+d)^2 \Rightarrow$ *valoarea maximă a lui a este* 9.
a) 930
b) 1001
c) Dacă $a=1 \Rightarrow \{b, c, d\}=\{1, 0, 0\}$. *Sunt* $\underline{3}$ *astfel de numere:* 1100, 1010 , 1001.
Dacă $a=4 \Rightarrow 4=(2+0+0)^2=(1+1+0)^2$. *Cu cifrele* 4, 2, 0, 0 *se obţin* $\underline{6}$ *numere, iar cu cifrele* 4, 1, 1, 0 *se obţin* $\underline{9}$ *numere.*
Dacă $a=9 \Rightarrow 9=(3+0+0)^2=(2+1+0)^2=(1+1+1)^2$.
Cu cifrele 9, 3, 0, 0 *se formează* $\underline{6}$ *numere.*
Cu cifrele 9, 2, 1, 0 *sunt* $3 \cdot 6=\underline{18}$ *numere.*
Cu cifrele 9, 1, 1, 1 *sunt* $\underline{4}$ *numere.*
În total $3+6+9+6+18+4=\underline{46}$ *de numere.*

Răspuns:
***a)* 930**
***b)* 1001**
***c)* 46**

PROBLEMA 3 / 10

punctaj: 10

Pregătindu-se pentru Olimpiada de Matematică, Ioana trebuie să rezolve 24 de probleme în patru zile. În fiecare zi rezolvă mai multe probleme decât în ziua precedentă. În ziua a patra rezolvă de cinci ori mai multe probleme decât în prima zi. Care este numărul maxim de probleme pe care le poate rezolva în ziua a treia?

Raspuns corect: 9
Solutie:

Notăm cu a, b respectiv c numărul problemelor rezolvate în zilele unu, doi şi trei.
$a+b+c+5a=24$ *şi* $a<b<c<5a$
$8a=a+a+a+5a<a+b+c+5a<5a+5a+5a+5a=20a$
$8a<24<20a \Rightarrow a=2$ *şi* $b+c=12$.
Valoarea maximă pentru c este 9.

***Răspuns:* 9**

PROBLEMA 4 / 10

punctaj: 10

Câte numere naturale n se pot scrie în mod unic ca suma a cinci numere naturale nenule distincte?

Raspuns corect: 2
Solutie:

$n=1+2+3+4+5=15$ *este cel mai mic număr natural care se poate scrie în mod unic ca sumă a cinci numere naturale nenule distincte.*
De asemenea, $n=1+2+3+4+6=16$ *verifică condiţiile problemei.*
Dacă $n \geq 17$,
$17=1+2+3+4+7$
$=1+2+3+5+6$
şi
$n=1+2+3+4+(a+7)$
$=1+2+3+5+(a+6)$
cu $a=n-17$, $a \in \mathbb{N}$, *adică există cel puțin două scrieri diferite pentru orice număr natural* n, $n \geq 17$.

***Răspuns:* 2**

PROBLEMA 5 / 10

punctaj: 10

Patru copii scriu cifre în pătrățelele unui dreptunghi cu 30 *de coloane și* 20 *de linii. Începând cu colțul din stânga sus pătrățelele se completează de la stânga la dreapta pe fiecare linie, iar liniile se completează de sus în jos, astfel: primul copil scrie cifra* 1 *într-un pătrățel, al doilea scrie cifra* 2 *în* 2 *pătrățele, al treilea scrie cifra* 3 *în* 3 *pătrățele, al patrulea scrie cifra* 4 *în* 4 *pătrățele. Apoi, primul copil scrie cifra* 1 *în* 5 *pătrățele, al doilea scrie cifra* 2 *în* 6 *pătrățele, ș.a.m.d.*

---

a) Care este cifra scrisă în ultimul pătrăţel completat al dreptunghiului?

Raspuns corect: 3

punctaj: 2

b) Care este cifra scrisă cel mai des?

Raspuns corect: 2

punctaj: 2

c) De câte ori este scrisă cifra cu cele mai multe apariţii?

Raspuns corect: 162

punctaj: 2

d) Care este suma cifrelor scrise în întreg dreptunghiul după ce s-a terminat completarea?

Raspuns corect: 1476

punctaj: 4

Solutie:

Vom nota cu n ultimul set complet de pătrăţele completate cu aceeaşi cifră.
$1+2+\dots+n \leq 600 \Leftrightarrow n(n+1) \leq 1200$
$\Rightarrow n_{maxim} = 34$.
Mai rămân $\boxed{5}$ *pătrăţele de completat.*
Cifra 1 *apare de* $1+5+9+\dots+33=153$ *ori.*
Cifra 2 *apare de* $2+6+10+\dots+34=162$ *ori.*
Cifra 3 *apare de* $3+7+11+\dots+31+\boxed{5}=141$ ori.
Cifra 4 *apare de* $4+8+12+\dots+32=144$ *ori.*
Suma cifrelor este $153\cdot1+162\cdot2+141\cdot3+144\cdot4=1476$.

Răspuns:
a) **3**
b) **2**
c) **162**
d) **1476**

PROBLEMA 6 / 10

punctaj: 10

Care este cel mai mare număr natural de trei cifre $\overline{abc}$ *care împărţit la* 16 *dă restul* 3*, iar răsturnatul lui,* $\overline{cba}$, *dă restul* 12 la *împărţirea cu* 15*?*

Raspuns corect: 771
Solutie:

$\overline{cba}=15\cdot K_1+12 \Rightarrow a \in \{2, 7\}$.
Evident că vom căuta valorile lui $\overline{abc}$ *pentru* $a=7$.
$$\left.\begin{array}{r}\overline{7bc}=16\cdot K_2+3\\ \overline{cba} \,\vdots\, 3 \Rightarrow \overline{abc} \,\vdots\, 3\end{array}\right\} \Rightarrow K_2 \,\vdots\, 3$$
Se obţine $K_2=48$ *și* $\overline{abc}=771$.

Răspuns: **771**

PROBLEMA 7 / 10

punctaj: 10

La ziua Larisei părinţii au comandat o pizza uriaşă pentru toţi invitaţii la petrecere. Pentru a o mânca, părinţii au tăiat-o în 9 *felii apoi au invitat fiecare copil să taie, fiecare pe rând, o bucată de pizza în alte* 6 *bucăţi.*
La un moment dat copiii au început să numere bucăţile rezultate, dar au obţinut mai multe rezultate: 2019, 2014, 2018 *şi* 2029*.*
Care dintre aceste rezultate nu este, sigur, corect ?

Raspuns corect: 2018
Solutie:

La fiecare împarţire, numărul feliilor creşte cu 5.
Deci, rezultatul este un număr de forma $5k+4$**.**
Numărul 2018 *este singurul care nu este de această formă.*

***Răspuns:* 2018**

PROBLEMA 8 / 10

punctaj: 10

*Un număr natural se numeşte "**perfect**" dacă toate cifrele sale sunt pătrate perfecte şi suma oricăror două cifre alăturate este pătrat perfect.*

---

*a) Câte numere **"perfecte"** de două cifre există?*

Raspuns corect: 3

punctaj: 2

*b) Câte numere **"perfecte"** de cinci cifre există?*

Raspuns corect: 57

punctaj: 4

c) Care este numărul minim de cifre de 0 *pe care le are în scrierea sa un număr **"perfect"** de* 2019 *cifre?*

Raspuns corect: 1009

punctaj: 4

Solutie:

*a) Cifrele unui număr **"perfect"** pot fi* 0, 1, 4 *și* 9.
Deoarece suma oricăror două cifre alăturate este pătrat perfect, nu pot fi două cifre alăturate nenule $(1+1=2,\ 1+4=5,\ 1+9=10,\ 4+4=8,\ 4+9=13,\ 9+9=18)$**.**
*Numerele de două cifre **"perfecte"** sunt* 10, 40 *și* 90.
b) Numerele de cinci cifre sunt de forma $\overline{1abcd}$, $\overline{4abcd}$ *și* $\overline{9abcd}$ *unde* $a=0$**.**
Dacă $b\in\{1,4,9\}$, *atunci* $c=0$ *și* $d\in\{0,1,4,9\}$ *și vor fi* 12 *numere de fiecare formă.*
Dacă $b=0$, *atunci* $c=0$ *și* $d\in\{0,1,4,9\}$ *sau* $c\in\{1,4,9\}$ *și* $d=0$ *și vor fi* 7 *numere de fiecare formă.*
În total există $3\cdot(12+7)=57$ *de numere **"perfecte"** de cinci cifre.*
c) Pentru a fi cât mai puține cifre de 0, *cum prima cifră este nenulă, făcând perechi,* $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{2017}a_{2018}a_{2019}}$, *cifrele de pe locurile pare trebuie sa fie egale cu* 0 *și cele de pe locurile impare trebuie să fie nenule.*
Numărul minim de cifre de 0 *este* 1009.

Răspuns:
***a)* 3**
***b)* 57**
***c)* 1009**

PROBLEMA 9 / 10

punctaj: 10

Suma ultimelor patru cifre ale lui $n!$ *este un număr impar (n este un număr natural nenul si* $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$).

---

a) Care este ultima cifră a lui $n!$ *pentru* $n \geq 5$?

Raspuns corect: 0

punctaj: 3

b) Care este cel mai mare n cu această proprietate?

Raspuns corect: 14

punctaj: 7

Solutie:

Dacă $n \geq 15$ *atunci* $5^3 | n!$ *şi* $2^4 | n! \Rightarrow$ *ultimele trei cifre sunt* $\overline{000}$ *şi* $n!$ *este divizibil cu* 16.
De aici obţinem că ultimele 4 *cifre sunt* $\overline{a000}$ *cu a par şi nu convine.*
Pentru $\boxed{n = 14}$ *avem* $14! = 87.178.291.200$

Răspuns:
***a)* 0**
***b)* 14**

PROBLEMA 10 / 10

punctaj: 10

*Care este cea mai mică valoare pe care o poate lua suma cifrelor numărului n+*8 *dacă suma cifrelor lui n este* 2019?

Raspuns corect: 2

Solutie:

Cum suma cifrelor lui n este $M_9 + 3$, *obținem că suma cifrelor lui* $n + 8$ *este* $M_9 + 2$.

Cea mai mică astfel de sumă este 2 *si se obține pentru* $n = 1\underbrace{99...99}_{224 \text{ de cifre}}2$.

Răspuns: 2

Total puncte: 100