Concursul de Matematică Upper.School ediția 2019

Etapa II - Clasa a 6-a

Lista de probleme

PROBLEMA 1 / 10 punctaj: 10

Să se afle câte perechi de numere naturale au proprietatea că suma dintre produsul și diferența lor este egală cu 2019.

Raspuns corect: 4

Solutie:

Fie a și b cele două numere. Dacă $a > b \Rightarrow$
$ab + a - b = 2019 \Leftrightarrow a(b+1) - (b+1) = 2018$
$\Leftrightarrow (a-1)(b+1) = 2018$.
Cum $2018 = 2 \cdot 1009$, *avem cazurile:*

$a - 1$	1	2	1009	2018
$b + 1$	2018	1009	2	1

Obținem:

a	2	3	1010	2019
b	2017	1008	1	0

Observaţie: dacă $a < b$, $ab + b - a = 2019$ *devine* $(a+1)(b-1) = 2018$
Perechile de numere sunt aceleaşi: (2, 2017), (3, 1008), (1, 1010) *și* (0, 2019).

***Răspuns:* 4**

PROBLEMA 2 / 10 punctaj: 10

Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 2019\}$.

---

a) Câte submulţimi cu 2018 *elemente are A?*

Raspuns corect: 2019

punctaj: 1

b) Câte submulţimi cu cel mult două elemente are A?

Raspuns corect: 2039191

punctaj: 4

c) Câte elemente din A au exact trei divizori naturali?

Raspuns corect: 14

punctaj: 5

Solutie:

a) $A = \{1, 2, 3, ..., 2019\}$.
Pentru a obţine submulţimi cu 2018 *elemente, se elimină câte un element din A, deci se vor obţine:*
$\{2, 3, ..., 2019\}, \{1, 3, ..., 2019\}, ..., \{1, 2, ..., 2018\}$, *adică* 2019 *submulţimi.*

b) Există o *mulţime cu zero elemente:* $\varnothing$.
Există $\{1\}, \{2\}, ..., \{2019\} \Rightarrow$ 2019 *submulţimi cu câte un element.*
Există:

	{1, 2}	{2, 3}	...	{2018, 2019}
	{1, 3}	{2, 4}	...	
	...	...	...	
	{1, 2019}	{2, 2019}	...	
Total:	2018	2017	...	1

$$\Rightarrow 2018 + 2017 + ... + 1 = \frac{2018 \cdot 2019}{2}$$ *submulţimi cu câte două elemente.*

$$Total\ = 1 + 2019 + \frac{2018 \cdot 2019}{2} = 2020 + 2019 \cdot 1009 = 2020 + 2037171 = 2039191$$

c) Numerele cu exact 3 *divizori sunt de forma* p^2, *unde p este prim.*
$p^2 \le 2019 \Rightarrow p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43\}$, *mulţime care are* 14 *elemente.*

Răspuns:
***a)* 2019**
***b)* 2039191**
***c)* 14**

PROBLEMA 3 / 10

punctaj: 10

Pe un stadion cu 30000 *de locuri numerotate de la* 1 *la* 30000, *stau tot atâţia spectatori. Spunem că doi spectatori sunt* **"prieteni"** *dacă numărul locului unuia dintre ei divide numărul locului celuilalt.*

---

a) Pe ce loc stă spectatorul **"prieten"** *cu toţi ceilalţi?*

Raspuns corect: 1

punctaj: 1

*b) Câţi **"prieteni"** are spectatorul care stă pe locul* 2007*?*

Raspuns corect: 18

punctaj: 4

c) Pe ce loc stă spectatorul cu exact 60 *de **"prieteni"**?*

Raspuns corect: 10800 sau orice altă variantă corectă

punctaj: 5

Solutie:

a) Spectatorul care stă pe locul cu numărul 1 *este **"prieten"** cu toţi ceilalţi.*
b) $2007 = 3^2 \cdot 223$ *are* $(2+1)(1+1) = 6$ *divizori.*
$2007 \cdot 2$, $2007 \cdot 3$, ..., $2007 \cdot 14$ *sunt multipli de* 2007*, diferiţi de* 2007*.*
$\Rightarrow$ *Spectatorul care stă pe locul* 2007 *are* $5 + 13 = 18$ ***"prieteni"** (el nefiind **"prieten"** cu sine însuşi).*
*c) Sunt mai multe persoane pe stadion care au exact 60 de **"prieteni"**.*

- *Ex 1:* $10800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ *are* $(4+1)(3+1)(2+1) = 60$ *de divizori şi doar* $2 \cdot 10800$ *reprezintă un multiplu al lui* 10800 *care să fie* <30000 $\Rightarrow 59 + 1 = 60$ *de **"prieteni"** are cel care stă pe locul* 10800*.*
- *Ex 2:* 499 *este număr prim și are* 60 *de multipli mai mici decât* 30000*, din care* 59 *sunt diferiţi de* 499*. Cum persoana care stă pe locul cu numărul* 1 *este **"prieten"** cu orice alt spectator, obţinem că persoana care stă pe locul* 499 are 59+1=60 *de **"prieteni"**.*

Persoanele care au exact 60 *de **"prieteni"** stau pe unul din locurile:* 499, 511, 514, 515, 517, 531, 555, 567, 640, 780, 10800, 11088, 11340, 11760, 12240, 12960, 13104, 13200, 13680.

Răspuns:
***a)* 1**
***b)* 18**
***c)* 10800 sau orice altă variantă corectă**

PROBLEMA 4 / 10

punctaj: 10

Într-un club de şah cu 25 de membri, fiecare jucător joacă câte un meci cu alţi k jucători. Aflaţi suma numerelor naturale k pentru care aceasta este realizabil.

Raspuns corect: 156
Solutie:

Deoarece numărul meciurilor este $\frac{25 \cdot k}{2}$*, rezultă că numărul k este par.*
Mai mult, pentru oricare număr k par, cerinţa problemei este realizabilă: aranjăm cele 25 *de persoane pe un cerc şi organizăm jocurile astfel încât fiecare jucător să joace cu cele* $\frac{k}{2}$

persoane din dreapta lui și cu cele $\frac{k}{2}$ *persoane din stânga lui.*

Suma numerelor k va fi: $2+4+\ldots+24=156$.

Răspuns: **156**

PROBLEMA 5 / 10

punctaj: 10

Spunem despre un număr natural că este ***"superprim"*** *dacă este prim şi se scrie ca suma a două numere prime.*

---

a) Care este cel mai mic număr ***"superprim"****?*

Raspuns corect: 5

punctaj: 2

b) Care este suma tuturor numerelor ***"superprime"*** *din mulţimea* {1, 2, 3, ..., 50}*?*

Raspuns corect: 118

punctaj: 3

c) Dacă $n \geq 100$ *şi* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *sunt primele n numere naturale* ***"superprime"****, să se calculeze restul împărţirii numărului* $A=p_1+p_2+\ldots+p_n-n$ *la* 6*.*

Raspuns corect: 4

punctaj: 5

Solutie:

a) $5=3+2$
b) $S=5+7+13+19+31+43 \Rightarrow S=118$
c) Cu excepţia lui 5*, toate numerele* ***"superprime"*** *sunt de forma* 6*k*+1.
$A=5+(6\cdot k_2+1)+(6\cdot k_3+1)+\ldots+(6\cdot k_n+1)-n=5+M_6+n-1-n=M_6+4$.
Restul este 4*.*

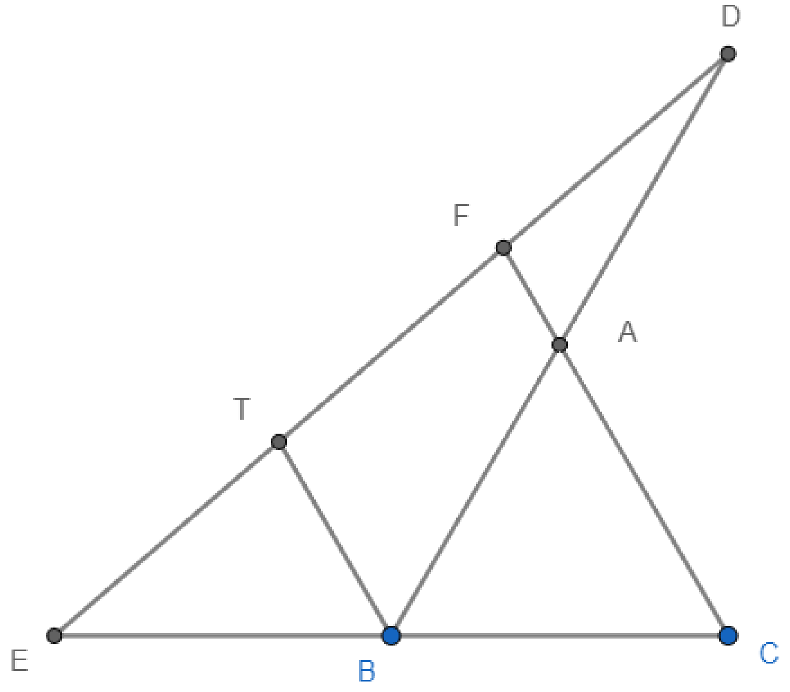
Răspuns:
a) **5**
b) **118**
c) **4**

PROBLEMA 6 / 10

punctaj: 10

Fie triunghiul echilateral ABC cu AB=6cm. Se consideră punctele D, E și F astfel încât $A \in (BD)$, $B \in (EC)$, $AC \cap DE = \{F\}$, $AD = BE = 6cm$. *Care este lungimea segmentului AF?*

Raspuns corect: 2
Solutie:



Fie $BT \parallel CF$, $T \in (EF)$. *Cum A este mijlocul segmentului (BD) obținem că AF este linie mijlocie în* $\triangle DBT \Rightarrow AF = \dfrac{BT}{2}$ (1)

$BT \parallel CF$ *și B mijlocul segmentului (CE)* $\Rightarrow$ *BT este linie mijlocie în* $\triangle CEF \Rightarrow BT = \dfrac{CF}{2}$ (2)

Din (1) *și* (2) $\Rightarrow AF = \dfrac{CF}{4} = \dfrac{AF}{4} + \dfrac{AC}{4} \Rightarrow 3AF = AC \Rightarrow AF = 2$.

***Răspuns:* 2**

PROBLEMA 7 / 10

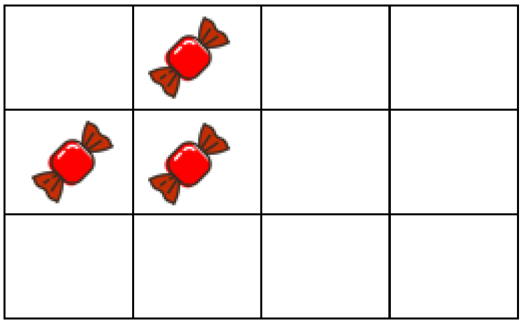
punctaj: 10

O cutie de bomboane de ciocolată are 12 *bomboane dispuse într-o formă dreptunghiulară compusă din pătrăţele aranjate pe* 3 *linii și* 4 *coloane. Un copil ia* 3 *bomboane.*

Probabilitatea ca cele 3 *bomboane luate să fie din căsuţe vecine este* $\dfrac{a}{b}$, *cu*

$(a, b) = 1$, $b \neq 0$. *Spunem că* 3 *căsuţe sunt vecine dacă una dintre ele are câte o latură comună cu celelalte două.*
Care este valoarea diferenţei $b - a$?

Raspuns corect: 93
Solutie:



Configuraţiile de câte 3 *căsuţe vecine sunt:*

1)

	O
O	O

2)

O	
O	O

3)

O	O
	O

4)

O	O
O	

5)

O
O
O

6)

O	O	O

De tip 1, 2, 3 *şi* 4 *sunt câte* 6 *variante.*
De tip 5 *sunt* 4 *variante, iar de tipul* 6 *sunt* 6 *variante.*
Posibilităţi de a selecta 3 *căsuţe din cele* 12 *sunt* 220.

$$P = \frac{24 + 6 + 4}{220} = \frac{34}{220} = \frac{17}{110} \Rightarrow a = 17 \text{ şi } b = 110.$$

$b - a = 93$

***Răspuns:* 93**

PROBLEMA 8 / 10

punctaj: 10

Se dau 4 *cuburi cu laturile de* 1cm, 2cm, 3cm, *respectiv* 5cm. *Denisa lipeşte cele* 4 *cuburi unul de altul şi calculează aria corpului astfel obţinut.*

Observaţie 1*: Cuburile se lipesc atunci când o faţă e inclusă in altă faţă.*
Observaţie 2*: Aria unui cub este suma ariilor celor* 6 *fețe ale cubului.*

---

a) Care este aria maximă (în cm^2) a noului corp?

Raspuns corect: 228

punctaj: 4

b) Care este aria minimă (în cm^2) a noului corp?

Raspuns corect: 194

punctaj: 6

Solutie:

a) *Pentru a obţine un corp cu aria cât mai mare trebuie ca, în momentul lipirii, cele 4 cuburi să aibă o parte comună cât mai mică*
$\Rightarrow$ *cele 3 cuburi mari trebuie lipite pe 3 feţe adiacente ale cubului mic, vârf în vârf*
$\Rightarrow$ *se pierd* $2\cdot(1+1+1)=6cm^2$
Corpul obţinut are aria: $6\cdot(1^2+2^2+3^2+5^2)-2\cdot(1+1+1)\ =234-6=228cm^2$
b) *Pentru a obţine un corp cu aria cât mai mică trebuie ca, în momentul lipirii, cele 4 cuburi să aibă o parte comună cât mai mare*
$\Rightarrow$ *trebuie ca oricare două să se lipească.*
Astfel se pierd $2(9+4+4+1+1+1)=40cm^2$
Aria corpului va fi: $234-40=194cm^2$

Răspuns:
***a)* 228**
***b)* 194**

PROBLEMA 9 / 10

punctaj: 10

Fie $1=d_1<d_2<d_3<\ldots<d_k=n$ *divizorii lui n.*
Aflați valoarea lui n pentru care $n=d_2{}^2+d_3{}^3$.

Raspuns corect: 68
Solutie:

Evident, d_2 *este număr prim.*
Dacă d_2 *este impar, atunci toţi divizorii lui n sunt impari, inclusiv* d_3 *și este imposibil (se obţine că n este număr par).*
$\Rightarrow d_2=2$ *şi* $d_2|d_2{}^2,\ d_2|n\Rightarrow d_2|d_3{}^2$, *ori* $d_2=2$ *deci* $d_3=2\cdot k$.
$n=d_2^2+d_3^3=4+8\cdot k^3\Rightarrow 4|n\Rightarrow d_3=4$
$\boxed{n\ =\ 68}$

***Răspuns:* 68**

PROBLEMA 10 / 10

punctaj: 10

Produsul tuturor divizorilor numărului natural n este $2019\cdot n^k$, *unde* $k\in\mathbb{N}$. *Care este cea mai mare valoare a lui k?*

Raspuns corect: 4
Solutie:

Notăm cu t numărul divizorilor lui n şi $1=d_1<d_2<\ldots<d_t=n$ *divizorii lui n.*
$2019\cdot n^k=d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_t$
$2019\cdot n^k=d_t\cdot d_{t-1}\cdot\ldots\cdot d_1$
Înmulţim ultimele două relaţii şi se obţine $(2019\cdot n^k)^2=(d_1\cdot d_t)\cdot(d_2\cdot d_{t-1})\cdot\ldots\cdot(d_t\cdot d_1)$.

Dar $d_1 \cdot d_t = d_2 \cdot d_{t-1} = \ldots = n$.

$(2019 \cdot n^k)^2 = n^t \Rightarrow$ $t =$ *par sau n este pătrat perfect.*

Cazul 1*: Notăm* $t = 2p$.

$2019 \cdot n^k = n^p \Leftrightarrow 2019 = n^{p-k} \Rightarrow p - k = 1$ *şi* $n = 2019$.

Divizorii lui 2019 *sunt* 1, 3, 673 şi 2019 $\Rightarrow k = 1$.

Cazul 2*:* $n = p^2$

$(2019 \cdot p^{2k})^2 = p^{2t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2019 \cdot p^{2k} = p^t \Leftrightarrow$

$2019 = p^{t-2k} \Rightarrow p = 2019$ *şi* $n = 2019^2$, $k = 4$

Răspuns: **4**

Total puncte: **100**