Concursul de Matematică Upper.School ediția 2019

Etapa II - Clasa a 7-a

Lista de probleme

PROBLEMA 1 / 10 punctaj: 10

Fie ABCD dreptunghi cu AD = 28cm și CD = 48cm. $M \in (AB)$ *astfel încât AM=5MB.*

---

a) Ce valoare are A_{ABCD}?

Raspuns corect: 1344

punctaj: 1

b) Ce valoare are A_{DMC}?

Raspuns corect: 672

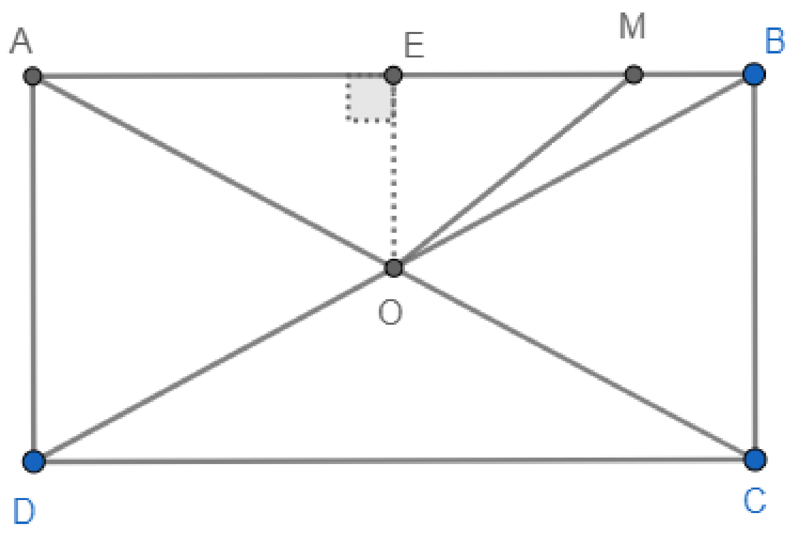
punctaj: 4

c) Notăm cu O punctul de intersecție al diagonalelor. Ce valoare are A_{BOM}?

Raspuns corect: 56

punctaj: 5

Solutie:



$a) A_{ABCD} = AD \cdot DC = 28 \cdot 48 cm^2 = 1344 cm^2$

b) $A_{DMC} = \frac{48 \cdot 28}{2} = 672cm^2$

c) $6 \cdot MB = 48cm \Rightarrow MB = 8cm$. Fie $OE \perp AB \Rightarrow OE = \frac{BC}{2} = 14cm$ (linie mijlocie).

$A_{BOM} = \frac{OE \cdot MB}{2} = \frac{14 \cdot 8}{2} = 56cm^2$

Răspuns:
a) **1344**
b) **672**
c) **56**

PROBLEMA 2 / 10

punctaj: 10

Pentru fiecare număr natural n, notăm cu p(n) produsul cifrelor nenule ale lui n.

---

*a) Care este valoarea lui p(*2019*) ?*

Raspuns corect: 18

punctaj: 2

*b) Care este valoarea numărului: p(*1*)+p(*2*)+...+p(*10*) ?*

Raspuns corect: 46

punctaj: 3

c) Care este valoarea numărului: $\sqrt{p(1)+p(2)+\ldots+p(100)}$?

Raspuns corect: 46

punctaj: 5

Solutie:

a) $p(2019) = 1 \cdot 2 \cdot 9 = 18$

b) $p(1)+p(2)+\ldots+p(9)+p(10) = 1+2+\ldots+9+1 = 46$

c) Pentru a *cifră nenulă avem:* $p(\overline{a0})+p(\overline{a1})+p(\overline{a2})+\ldots+p(\overline{a9}) =$
$a + a \cdot 1 + a \cdot 2 + \ldots + a \cdot 9 = a \cdot (1+1+2+\ldots+9) = 46a$
Suma de sub radical este: $(1+2+\ldots+9)+46 \cdot (1+2+\ldots+9)+1 =$
$46 \cdot (1+1+2+3+\ldots+9) = 46^2$

Răspuns:
a) **18**

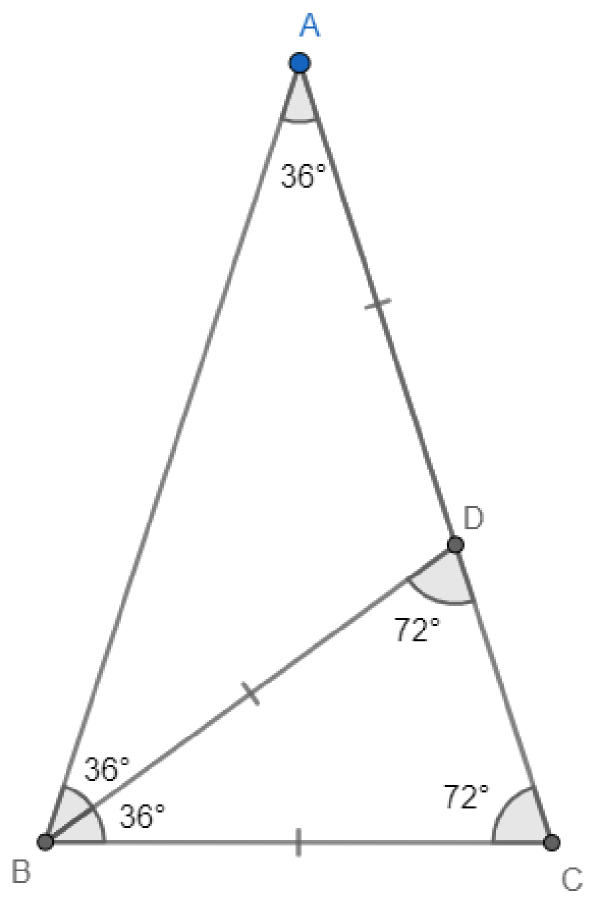
b) **46**
c) **46**

PROBLEMA 3 / 10

punctaj: 10

În triunghiul isoscel $\triangle ABC$ *cu* $(AB)\equiv(AC)$ *știm că* $m(\measuredangle BAC)=36°$, *iar lungimea laturii* BC *este* 10*cm. Care este valoarea expresiei* $(AB+AC-BC)^2$?

Raspuns corect: 500
Solutie:



$m(\measuredangle B)=m(\measuredangle C)=72°$. *Fie* $(BD$ *bisectoarea* $\measuredangle ABC$ *cu* $D\in(AC)$. $\triangle BDC$ *este isoscel cu* $(BD)\equiv(BC)$, *iar* $(BD)\equiv(AD)$.

$\triangle BDC \sim \triangle BAC\ (U.U.) \Rightarrow \dfrac{DC}{BC}=\dfrac{BC}{AC} \Leftrightarrow DC(AD+DC)=BC^2$. *Notăm*

$DC=x \Rightarrow x^2+10x=100 \Rightarrow (x+5)^2=125 \Rightarrow x=\pm5\sqrt{5}-5$.

Dar x este pozitiv $\Rightarrow x=5\sqrt{5}-5 \Rightarrow AC=AB=5\sqrt{5}+5$

$\Rightarrow (AB+AC-BC)^2=(10\sqrt{5})^2=500$

Răspuns: **500**

PROBLEMA 4 / 10

punctaj: 10

Câte triplete de numere naturale verifică relația $x+\frac{x}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{yz}$, $y\neq 0$, $0<z\leq 2019$?

Raspuns corect: 2019

Solutie:

Aducând la același numitor se obține: $xyz+xz+y=1$.
Dacă $x,y,z\geq 1$ *atunci* $xyz\geq 1$, $xz\geq 1 \Rightarrow xyz+xz+y\geq 3>1$ *(contradicție)*
În concluzie, cel puțin unul dintre numerele x, y, z este egal cu $0 \Rightarrow x=0,\ y=1$
Cum $z\in\mathbb{N}^*$, $z\leq 2019\Rightarrow z\in\{1, 2, 3, ..., 2019\}$ *și numărul tripletelor care satisfac relația este egal cu numărul valorilor pe care le poate lua z, adică* 2019.

***Răspuns:* 2019**

PROBLEMA 5 / 10

punctaj: 10

Se consideră numerele reale x, y, z cu $x, y, z>1$ *și care verifică relațiile:*
$x+y=xy-5$, $y+z=yz-7$, $z+x=zx-11$.

a) Care este valoarea produsului $(x-1)(y-1)(z-1)$?

Raspuns corect: 24

punctaj: 6

b) Care este valoarea expresiei $x+y+z$?

Raspuns corect: 12

punctaj: 4

Solutie:

a)

$$\left.\begin{array}{r} xy-x-y+1=6\Rightarrow(x-1)(y-1)=6 \\ yz-y-z+1=8\Rightarrow(y-1)(z-1)=8 \\ zx-z-x+1=12\Rightarrow(z-1)(x-1)=12 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} [(x-1)(y-1)(z-1)]^2=24^2 \\ x,y,z>1 \end{array}\right\}\Rightarrow(x-1)(y-1)(z-1)=24$$

b)
$(x-1)(y-1)=6\Rightarrow z-1=4\Rightarrow z=5$
$(y-1)(z-1)=8\Rightarrow x-1=3\Rightarrow x=4$
$(z-1)(x-1)=12\Rightarrow y-1=2\Rightarrow y=3$
$\Rightarrow x+y+z=12$

Răspuns:
***a)* 24**

***b)* 12**

PROBLEMA 6 / 10

punctaj: 10

Pentru numerele naturale diferite m și n, definesc d(m, n) ca cel mai mare întreg k astfel încât $3^k | m-n$*. Aflați cel mai mic număr x de* 3 *cifre pentru care* $d(x^2, 7) \geq 7$

Raspuns corect: 175

Solutie:

$d(x^2,7) \geq 7 \Rightarrow 3^7 | x^2 - 7 \Rightarrow 2187 | x^2 - 7 \Rightarrow$

$2187 | x^2 - 7 - 14 \cdot 2187 \Rightarrow$

$2187 | x^2 - (7 \cdot 25)^2 \Rightarrow$

$3^7 = 2187 | (x-175)(x+175)$

Dacă $3 | x-175$ *și* $3 | x+175 \Rightarrow x | 2 \cdot 175$ *(contradicție)* $\Rightarrow$

$3^7 | x-175$ *sau* $3^7 | x+175 \Rightarrow$

Cel mai mic număr de 3 *cifre este* $\boxed{x = 175}$

***Răspuns:* 175**

PROBLEMA 7 / 10

punctaj: 10

Andrei desenează cu negru, un singur triunghi pe fiecare foaie de hârtie pe care o are. Apoi desenează cu roșu liniile importante ale fiecărui triunghi (mediane, bisectoare, înălțimi, mediatoare) care au drepte suport diferite de cele ale laturilor triunghiului. Observând că nu este atent în timpul orei, profesorul lui de matematică îl intreabă:
- Ce faci, Andrei?
- Desenez triunghiuri echilaterale, triunghiuri isoscele neechilaterale și triunghiuri dreptunghice neisoscele.
- Câte triunghiuri echilaterale ai desenat?
- În total sunt 27 *de segmente negre și* 58 *de linii roșii.*
După un moment de gândire, profesorul spune:
- Andrei, nu pot afla din aceste informații câte triunghiuri echilaterale ai desenat.
- Așa este, spune Andrei, dar să știți că numărul triunghiurilor echilaterale este cel mai mare.

a) Câte triunghiuri echilaterale a desenat Andrei?

Raspuns corect: 4

punctaj: 4

b) Câte triunghiuri isoscele neechilaterale a desenat Andrei?

Raspuns corect: 2

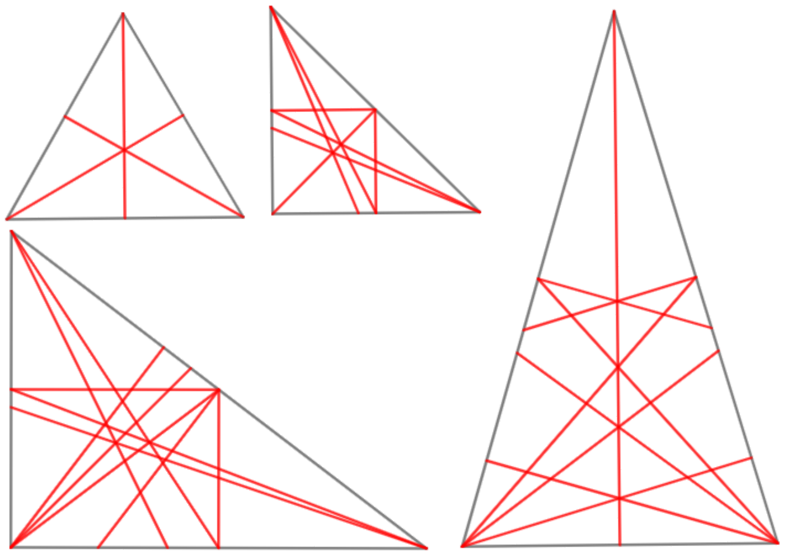
punctaj: 3

c) Câte triunghiuri dreptunghice a desenat Andrei?

Raspuns corect: 4

punctaj: 3

Solutie:



- *Într-un triunghi echilateral sunt* 3 *linii desenate cu roșu.*
- *Într-un triunghi isoscel dreptunghic sunt* 7 *linii desenate cu roșu.*
- *Într-un triunghi isoscel cu măsura unghiurilor de la bază diferită de* $45°$ *și* $60°$ *sunt* 9 *linii desenate cu roșu.*
- *Într-un triunghi dreptunghic neisoscel sunt* 10 *linii desenate cu roșu.*

Notăm cu:

- ***a*** *numărul de triunghiuri echilaterale.*
- ***b*** *numărul de triunghiuri isoscele dreptunghice.*
- ***c*** *numărul de triunghiuri isoscele cu măsura unghiurilor de la bază diferită de* $45°$ *și* $60°$**.**
- ***d*** *numărul de triunghiuri dreptunghice neisoscele.*

Orice triunghi are 3 *segmente negre.*

$$\left.\begin{array}{r} 3a+3b+3c+3d=27 \\ 3a+7b+9c+10d=58 \end{array}\right\} \Rightarrow 4b+6c+7d=31 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 7d=M_2+1 \Rightarrow d=M_2+1 \\ 7d<31 \Rightarrow 7d<35 \Rightarrow d<5 \end{array}\right\} \Rightarrow d\in\{1,3\}$$

- *Cazul d*=1 $\Rightarrow$
  $4b+6c=24 \Rightarrow 2b+3c=12 \Rightarrow$
  $$\left.\begin{array}{r} 2b=M_3 \Rightarrow b=M_3 \Rightarrow b=3p \\ 3c=M_2 \Rightarrow c=M_2 \Rightarrow c=2q \end{array}\right\} \Rightarrow$$
  $6p+6q=12 \Rightarrow p+q=2$
  - *Subcaz p*=0 $\Rightarrow b=0$, $c=4$, $\boxed{a=4}$ (*Nu convine. Avem* 4 *triunghiuri echilaterale,* $b+c=4$ *triunghiuri isoscele neechilaterale și* 1 *triunghi dreptunghic neisoscel.*)

- *Subcaz p=1* $\Rightarrow b=3,\ c=2,\ \boxed{a=3}$ *(Nu convine. Avem* 3 *triunghiuri echilaterale,* $b+c=5$ *triunghiuri isoscele neechilaterale și* 1 *triunghi dreptunghic neisoscel.)*
- *Subcaz p=2* $\Rightarrow b=6,\ c=0,\ \boxed{a=2}$ *(Nu convine. Avem* 2 *triunghiuri echilaterale,* $b+c=6$ *triunghiuri isoscele neechilaterale și* 1 *triunghi dreptunghic neisoscel.)*

- *Cazul d=3* $\Rightarrow$

  $4b+6c=10 \Rightarrow b=1,\ c=1,\ \boxed{a=4}$

  Avem 4 *triunghiuri echilaterale,* $b+c=2$ *triunghiuri isoscele neechilaterale și* 3 *triunghiuri dreptunghice neisoscele. Doar în acest caz numărul de triunghiuri echilaterale este cel mai mare, iar numărul total de triunghiuri dreptunghice este* $b+d=4$.

<u>Obs:</u> Din cauza unei erori de tehnoredactare, la această problemă s-a acordat punctaj maxim tuturor participanților.

Răspuns:
a) **4**
b) **2**
c) **4**

PROBLEMA 8 / 10

punctaj: 10

Pe fiecare latură a unui triunghi se consideră n puncte (diferite de vârfuri). Se notează cu T_n *numărul triunghiurilor nedegenerate care se pot forma având vârfurile printre cele 3n puncte considerate.*

---

a) Care este valoarea lui T_2*?*

Raspuns corect: 20

punctaj: 3

b) Determinați cea mai mică valoare a lui n pentru care $T_n > 2019$?

Raspuns corect: 9

punctaj: 7

Solutie:

a) $T_2 = 20$

b) *Vom număra în câte moduri putem selecta* 3 *puncte dintre cele* 3*n pe care le avem la dispoziție. Unele triplete formează triunghiuri degenerate, iar pe acestea le vom elimina ulterior. Primul punct poate fi ales în* 3*n moduri, al doilea în 3n-1 moduri, iar ultimul în 3n-2 moduri. Dar triunghiul determinat de tripletul* (A_i, A_j, A_k) *este același cu cel determinat de tripletele:* (A_i, A_k, A_j), (A_j, A_i, A_k), (A_j, A_k, A_i), (A_k, A_i, A_j), (A_k, A_j, A_i). *Așadar numărul triunghiurilor determinate de cele* 3*n puncte, inclusiv cele degenerate este*

$$\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{6}.$$

Trei puncte situate pe o aceeși latură determină triunghiuri degenerate. Raționând similar se obține că numărul tripletelor care determină triunghiuri degenerate este $3\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

$T_n = \frac{3n(3n-1)(3n-2)}{6} - \frac{3n(n-1)(n-2)}{6}$

$= \frac{3n(9n^2-9n+2-n^2+3n-2)}{6} = \frac{n(8n^2-6n)}{2}$

$\Rightarrow \boxed{T_n = n^2(4n-3)}$

$T_8 = 1856 < 2019 < 2673 = T_9$

Răspuns:
a) **20**
b) **9**

PROBLEMA 9 / 10

punctaj: 10

Un număr natural n are proprietatea ***"Q"*** *dacă* $\sqrt{12n+1} \in \mathbb{Q}$ *și are proprietatea* ***"I"*** *dacă* $\sqrt{12n+k} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, *pentru orice* $k \in \{2,3,\ldots,49\}$.

---

a) Care este cel mai mic număr n care *<u>are</u>* *proprietatea* ***"Q"*** *și* *<u>nu are</u>* *proprietatea* ***"I"***

Raspuns corect: 0

punctaj: 1

b) Care este cel mai mic număr n care *<u>are</u>* *și proprietatea* ***"Q"*** *și proprietatea* ***"I"****?*

Raspuns corect: 52

punctaj: 4

c) Câte numere naturale mai mici decât 2019 *<u>au</u>* *și proprietatea* ***"Q"*** *și proprietate* ***"I"****?*

Raspuns corect: 44

punctaj: 5

Solutie:

a) $\boxed{n=0}$

$\sqrt{12\cdot 2+1} = \sqrt{25} = 5 \in \mathbb{Q}$

Pentru k=12 $\Rightarrow \sqrt{12\cdot 2+12} = \sqrt{36} = 6 \in \mathbb{Q}$ *(nu are proprietatea* ***"I"****)*

b) Notăm $\sqrt{12n+1} = a$, $a \in \mathbb{Q}$

Este necesar ca $a^2 < 12n+2 < 12n+3 < \ldots < 12n+49 < (a+1)^2$

$\Rightarrow (a+1)^2 - a^2 > (12n+49)-(12n+2)$

$\Rightarrow 2a+1>47 \Rightarrow a>23 \Rightarrow a \geq 24$

Dar $12n+1=a^2 \Rightarrow$ *a este număr impar* $\Rightarrow$ *Cel mai mic este a=25 și* $\boxed{n=52}$

Cel mai mare număr din șir este $12\cdot 52+49=673<26^2$

c) $12n+1=a^2 \Rightarrow a=6k+1$ *sau* $a=6k+5$. *Conform punctului b)* $\Rightarrow k\geq 4$

$n<2019 \Rightarrow a<\sqrt{12\cdot 2019+1} \Rightarrow a\leq 155 \Rightarrow k\leq 25 \Rightarrow$ *Cele mai mari numere sunt*
$151=6\cdot 25+1$ *și* $154=6\cdot 25+4$

- *Pentru* $a=6k+1$ *sunt 22 de numere care au și proprietatea* ***"Q"*** *și proprietatea* ***"I"***
- *Pentru* $a=6k+5$ *sunt 22 de numere care au și proprietatea* ***"Q"*** *și proprietatea* ***"I"***

Răspuns:
a) **0**
b) **52**
c) **44**

PROBLEMA 10 / 10

punctaj: 10

Fie M={1, 2, 3, ..., 2019}*. Pentru fiecare submulțime A a mulțimii M notăm cu* a_A *suma dintre cel mai mic și cel mai mare element al lui A. Care este media aritmetică a tuturor numerelor* a_A?
Dacă o mulțime este formată dintr-un singur element acesta este și cel mai mic și cel mai mare element al submulțimii A.

Raspuns corect: 2020
Solutie:

- *Numărul 1 este cel mai mic în* 2^{2018} *submulțimi (la fiecare submulțime a mulțimii M\{1} se adaugă elementul 1)*
- *Numărul 2 este cel mai mic în* 2^{2017} *submulțimi (la fiecare submulțime a mulțimii M\{1,2} se adaugă elementul 2)*
- ....
- *Numărul 2018 este cel mai mic în* 2^1 *submulțimi (la fiecare submulțime a mulțimii M\{1,2,...,2018} se adaugă elementul 2018)*
- *Numărul 2019 este cel mai mic în* 2^0 *submulțimi*

Similar:

- *Numărul 2019 este cel mai mare în* 2^{2018} *submulțimi (la fiecare submulțime a mulțimii M\{2019} se adaugă elementul 2019)*
- *Numărul 2018 este cel mai mare în* 2^{2017} *submulțimi (la fiecare submulțime a mulțimii M\{2018,2019} se adaugă elementul 2018)*
- ....
- *Numărul 2 este cel mai mare în* 2^1 *submulțimi (la fiecare submulțime a mulțimii M\{2,3,...,2019} se adaugă elementul 2)*
- *Numărul 1 este cel mai mare în* 2^0 *submulțimi*

Întrucât mulțimea M are $2^{2019}-1$ *submulțimi nevide* $\Rightarrow$ *media aritmetică este:*

$$\frac{(1+2019)\cdot 2^{2018}+(2+2018)\cdot 2^{2017}+\ldots+(2019+1)\cdot 2^{0}}{2^{2019}-1}$$

$$=\frac{2020(2^{2018}+2^{2017}+\ldots+2^{0})}{2^{2019}-1}=\frac{2020(2^{2019}-1)}{2^{2019}-1}$$

$$=2020$$

Răspuns: **2020**

Total puncte: 100