# Concursul de Matematică Upper.School ediția 2019

## Etapa II - Clasa a 8-a

### Lista de probleme

**PROBLEMA 1 / 10** punctaj: 10

*Rezolvați fiecare dintre următoarele cerințe:*

---

a) Dacă a, b, c sunt numere reale atfel încât $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=x$, $b+c\neq 0$, $a+c\neq 0$, $a+b\neq 0$, atunci câte valori poate lua numărul $x$?

**Raspuns corect:** 2

punctaj: 5

b) Dacă numerele reale x și y verifică relația $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=4$, care este valoarea numărului 27n, unde $n=\frac{2x+4xy-2y}{x-y-2xy}$?

**Raspuns corect:** 18

punctaj: 3

c) Dacă numărul real x verifică relația $x^2-x-1=0$, care este valoarea expresiei: $\frac{x^3+x+1}{x^4}$?

**Raspuns corect:** 1

punctaj: 2

**Solutie:**

$a)$

- Dacă $a+b+c=0 \Rightarrow b+c=-a$, $c+a=-b$, $a+b=-c \Rightarrow \boxed{x=-1}$
- Dacă $a+b+c\neq 0$. Folosind proprietatea rapoartelor se obține: $\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=x \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow x \in \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$$

$$b)\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 4 \Rightarrow y - x = 4xy$$

$$n = \frac{2(x-y)+4xy}{x-y-2xy} = \frac{-8xy+4xy}{-4xy-2xy} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$27n\ =\ 18$$

$$c)\ \frac{x^3+x+1}{x^4} = \frac{x^3+x^2}{x^4} = \frac{x^2(x+1)}{x^4}$$

$$= \frac{x^2x^2}{x^4} = 1$$

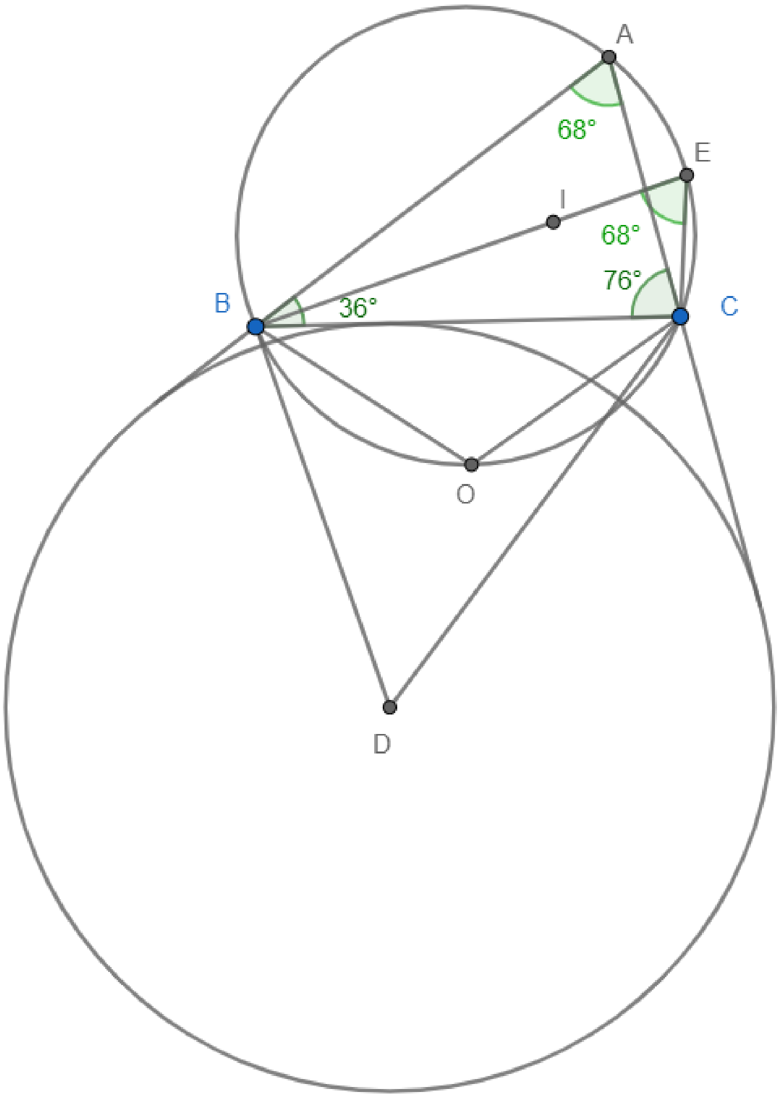
***Răspuns:***
***a)* 2**
***b)* 18**
**c) 1**

## PROBLEMA 2 / 10

**punctaj: 10**

*În* $\triangle ABC$, $m(\measuredangle ABC) = 36°$, $m(\measuredangle ACB) = 76°$. *I este centrul cercului înscris în* $\triangle ABC$, *iar D este centrul cercului exînscris* $\triangle ABC$ *care este tangent laturii* $(BC)$. *Cercul care trece prin B, C și centrul cercului circumscris* $\triangle BCD$ *intersectează* $(BI$ *în E. Care este măsura* $\measuredangle BEC$?

**Raspuns corect:** 68
**Solutie:**




*Notăm cu O centru cercului circumscris* $\triangle BCD$.

$m(\measuredangle CBD) = \dfrac{180° - m(\measuredangle ABC)}{2} = 72°$

$m(\measuredangle BCD) = \dfrac{180° - m(\measuredangle ACB)}{2} = 52° \Rightarrow$

$m(\measuredangle BDC) = 180° - m(\measuredangle CBD) - m(\measuredangle BCD) = 56°$

$m(\measuredangle BOC) = 2 \cdot m(\measuredangle BDC) = 2 \cdot 56° = 112°$

*Dar* $m(\measuredangle BAC) = 68° \Rightarrow m(\measuredangle BAC) + m(\measuredangle BOC) = 180° \Rightarrow$

$A, B, O, C, E$ *sunt conciclice* $\Rightarrow m(\measuredangle BEC) = m(\measuredangle BAC) = 68°$

***Răspuns:*** **68**

---

## PROBLEMA 3 / 10

**punctaj: 10**

*Fie* $M = a(3\sqrt{2} - 2) + b(5\sqrt{2} - 3)$, $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$

---

*a) Calculați partea întreagă a numărului* $3\sqrt{2} - 2$.

**Raspuns corect:** 2

punctaj: 3

*b) Calculați* $2\cdot(3\sqrt{2}-2)^{-2}\cdot(11-6\sqrt{2})$.

**Raspuns corect:** 1

punctaj: 3

*c) Dacă* $M=7\sqrt{2}-5$, *calculați a+b.*

**Raspuns corect:** 3

punctaj: 4

**Solutie:**

$a)\ \sqrt{16}<\sqrt{18}<\sqrt{25}\Rightarrow 4<\sqrt{18}<5\Rightarrow$
$2<\sqrt{18}-2<3\Rightarrow[\sqrt{18}-2]=2\Rightarrow$
$[3\sqrt{2}-2]=2$

$b)\ 2\cdot(3\sqrt{2}-2)^{-2}\cdot(11-6\sqrt{2})=$
$=\dfrac{22-12\sqrt{2}}{(3\sqrt{2}-2)^2}=\dfrac{22-12\sqrt{2}}{22-12\sqrt{2}}=1$

$c)\ 3a\sqrt{2}-2a+5b\sqrt{2}-3b=7\sqrt{2}-5\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{r}\sqrt{2}(3a+5b-7)=2a+3b-5\\ a,b\in\mathbb{Q}\Rightarrow 2a+3b-5\in\mathbb{Q}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{r}\sqrt{2}(3a+5b-7)\in\mathbb{Q}\\ 3a+5b-7\in\mathbb{Q}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}3a+5b-7=0\\ 2a+3b-5=0\end{array}\right\}\Rightarrow a=4,b=-1\Rightarrow a+b=3$

***Răspuns:***
***a)*** **2**
***b)*** **1**
***c)*** **3**

---

## PROBLEMA 4 / 10

**punctaj: 10**

*Numerele reale strict pozitive a, b, c satisfac relațiile:* $a-\dfrac{1}{b}=-\dfrac{5}{2},\ b-\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{6},\ c-\dfrac{1}{a}=4$.

---

*a) Calculați valoarea produsului* $abc$.

**Raspuns corect:** 1

punctaj: 5

*b) Dacă* $\left|(1-a)(1-b)(1-c)\right|=\frac{p}{q}$, *unde p și q sunt numere prime între ele, atunci calculați valoarea produsului* $pq$.

**Raspuns corect:** 15

punctaj: 5

**Solutie:**

$$a)\left(a-\frac{1}{b}\right)\left(b-\frac{1}{c}\right)\left(c-\frac{1}{a}\right)=\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot 4=-\frac{5}{3}\Rightarrow$$

$$\left(ab-\frac{a}{c}-1+\frac{1}{bc}\right)\left(c-\frac{1}{a}\right)=-\frac{5}{3}\Rightarrow$$

$$abc-b-a+\frac{1}{c}-c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{abc}=-\frac{5}{3}\Rightarrow$$

$$abc-\left(a-\frac{1}{b}\right)-\left(b-\frac{1}{c}\right)-\left(c-\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{abc}=-\frac{5}{3}\Rightarrow$$

$$abc+\frac{5}{2}-\frac{1}{6}-4-\frac{1}{abc}=-\frac{5}{3}\Rightarrow abc=\frac{1}{abc}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}(abc)^2=1\\ abc>0\end{array}\right\}\Rightarrow abc=1$$

$$b)\ (1-a)(1-b)(1-c)=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc=$$

$$=-(a+b+c)+\frac{ab+bc+ca}{abc}=-(a+b+c)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=$$

$$=-\left(a-\frac{1}{b}+b-\frac{1}{c}+c-\frac{1}{a}\right)=-\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{6}+4\right)=-\frac{5}{3}\Rightarrow$$

$$\left|(1-a)(1-b)(1-c)\right|=\frac{5}{3}\Rightarrow pq=15$$

***Răspuns:***
***a)*** **1**
***b)*** **15**

## PROBLEMA 5 / 10

**punctaj: 10**

*Care este suma pătratelor valorilor naturale ale lui n pentru care* $\frac{n+2019}{\left[\sqrt{n}\right]}$ *și* $\frac{n+2018}{\left[\sqrt{n+1}\right]}$ *sunt simultan numere naturale?*

**Raspuns corect:** 5

**Solutie:**

- Dacă $\left[\sqrt{n}\right]=\left[\sqrt{n+1}\right]$, cum $(n+2018, n+2019)=1$ se obține $\left[\sqrt{n}\right]=\left[\sqrt{n+1}\right]=1$, cu soluțiile $n=1$ sau $n=2$
- Dacă $\left[\sqrt{n}\right]\neq\left[\sqrt{n+1}\right]$, se obține că $n+1=k^2 \Leftrightarrow n=k^2-1$

  Numerele se rescriu: $\frac{k^2+2018}{k-1}$ și $\frac{k^2+2017}{k} \Rightarrow$

  $$\left.\begin{array}{r} k-1 \mid k^2+2018 \\ k-1 \mid k^2-1 \end{array}\right\} \Rightarrow k-1 \mid 2019 \ (1)$$

  $$\left.\begin{array}{r} k \mid k^2+2017 \\ k \mid k^2 \end{array}\right\} \Rightarrow k \mid 2017 \Rightarrow k \in \{1, 2017\} \ (2)$$

  Din (1) și (2) $\Rightarrow$ nu avem soluții în acest caz

*Singurele soluții sunt 1 și 2, și obținem* $1^2+2^2=5$

***Răspuns:*** **5**

## PROBLEMA 6 / 10

punctaj: 10

*Se știe că prețul unui diamant este direct proporțional cu pătratul masei lui. Din neatenție, diamantul a fost scăpat pe jos și s-a spart în 2 bucăți. Știind că prețul lui total a scăzut cu 18%, care este raportul dintre masa bucății mai mari si masa bucății mai mici?*

---

**Raspuns corect:** 9

**Solutie:**

*Notăm cu a, b masele celor 2 bucăți, cu x și y prețul bucăților după spargere și cu z prețul inițial.*

$$\left.\begin{array}{r} \frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2}=\frac{x+y}{a^2+b^2}=\frac{z}{(a+b)^2} \\ x+y=\frac{82z}{100} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$9a^2-82ab+9b^2=0 \Leftrightarrow$

$9a^2-81ab-ab+9b^2=0 \Leftrightarrow$

$9a(a-9b)-b(a-9b)=0 \Leftrightarrow$

$(a-9b)(9a-b)=0$

***Răspuns:*** **9**

## PROBLEMA 7 / 10

punctaj: 10

*Care este cel mai mare divizor comun de două cifre al numerelor de trei cifre* $\overline{abc}$, *știind că cifrele a, b și c verifică relația:* $a^3+b^3+c^3=3abc$?

---

**Raspuns corect:** 37

**Solutie:**

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$$

*Cum* $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ *și* $a+b+c>0$ *(pentru că* $a$ *este prima cifră a unui număr) obținem că* $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$

*Așadar numerele căutate sunt:* 111, 222, 333, ..., 999. *Cel mai mare divizor comun de* 2 *cifre al acestor numere este* 37.

***Răspuns:* 37**

---

## PROBLEMA 8 / 10

**punctaj: 10**

*Triunghiurile dreptunghice isoscele ACB și ACD de ipotenuză (AC) sunt situate în plane diferite, iar* $(ABC)\perp(ADC)$ *și AC = 8cm. Considerăm punctele M, N, O mijloacele segmentelor (BC), (AD) și (AC).*

---

*a) Care este pătratul lungimii segmentului [BD]?*

**Raspuns corect:** 32

punctaj: 2

*b) Care este pătratul lungimii segmentului [MN]?*

**Raspuns corect:** 24

punctaj: 3

*c) Care este măsura unghiului planelor (OBN) și (ODM)?*

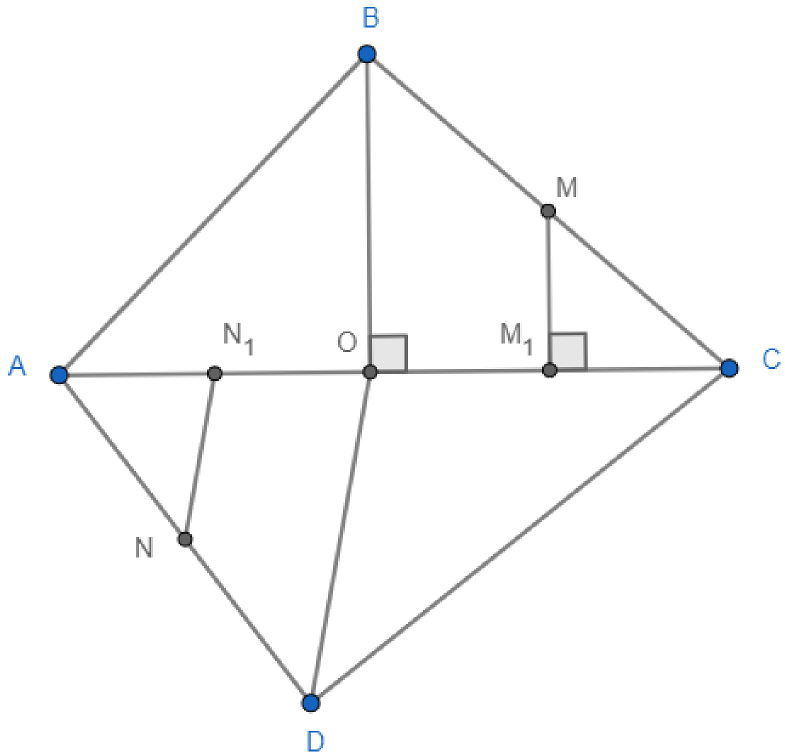
**Raspuns corect:** 60

punctaj: 5

**Solutie:**

a) $BD^2=BO^2+OD^2=4^2+4^2=32$

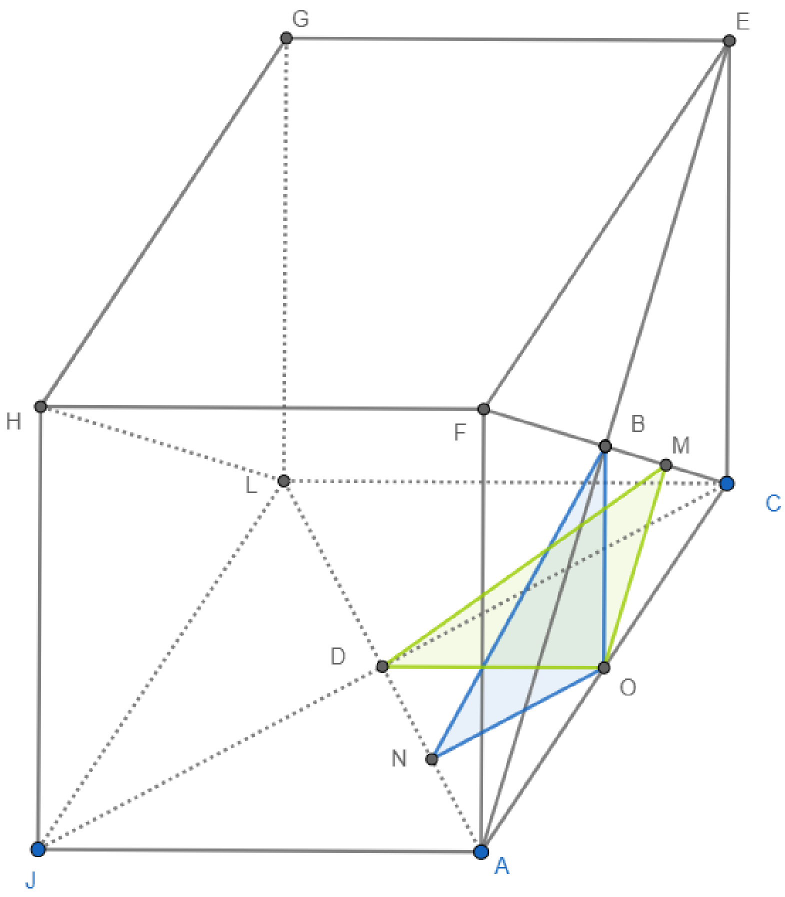
b)




*Fie* $MM_1 \perp AC \Rightarrow MM_1 = \dfrac{OB}{2} = 2$ *(linie mijlocie). Fie* $NN_1 \perp AC \Rightarrow \triangle NN_1M$ *este*

*dreptunghic în* $\measuredangle N_1 \xrightarrow{Pitagora} MN^2 = NN_1{}^2 + MN_1{}^2 = NN_1{}^2 + N_1M_1{}^2 + MM_1{}^2 = 4 + 16 + 4 = 24$

*c) Completăm la cub.*



$$\left.\begin{array}{r} OB \perp (ADC) \Rightarrow OB \perp AD \\ ON \perp AD \\ OB \cap ON = \{O\} \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (OBN)$$

$$\left.\begin{array}{r} OD \perp (ABC) \Rightarrow OD \perp BC \\ OM \perp BC \\ OD \cap OM = \{O\} \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (ODM)$$

$$\Rightarrow \measuredangle((OBN),(ODM)) = \measuredangle(AD, BC)$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \measuredangle(AD, BC) = \measuredangle(AL, CF) \\ CF \parallel LH \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\measuredangle(AL, CF) = \measuredangle(AL, LH) = 60^\circ \ (\triangle ALH \ echilateral)$$

***Răspuns:***
***a)*** **32**
***b)*** **24**
***c)*** **60**

## PROBLEMA 9 / 10

**punctaj: 10**

*Pe o tablă este scris numărul 123456789. O operație înseamnă să alegem două cifre cărora să li se scadă câte o unitate și să li se schimbe locurile între ele. Care este cel mai mic număr care se poate obține aplicând aceste operații?*

*Exemplu de operație:* $123\underline{45}6789 \rightarrow 123\underline{43}6789$

---

**Raspuns corect:** 1
**Solutie:**

*Inițial suma tuturor cifrelor este* 45*. După fiecare operație suma cifrelor își păstrează paritatea, iar în final aceasta nu poate fi mai mică decât* 1*. Numărul minim la care se poate ajunge este* 1 *(precedat de* 8 *zerouri), iar acesta se obține astfel:*

- *după* 8 *operații transformăm în* 01 *ultimele* 2 *cifre (perechea de cifre de pe pozițiile* 8 *și* 9*);*
- *după* 6 *operații transformăm în* 01 *perechea de cifre de pe pozițiile* 6 *și* 7*;*
- *după* 4 *operații transformăm în* 01 *perechea de cifre de pe pozițiile* 4 *și* 5*;*
- *după* 2 *operații transformăm în* 01 *perechea de cifre de pe pozițiile* 2 *și* 3*;*
- *după* 1 *operație transformăm în* 00 *perechea de cifre de pe pozițiile* 1 *și* 3*;*
- *după* 1 *operație transformăm în* 00 *perechea de cifre de pe pozițiile* 5 *și* 7*;*

***Răspuns:*** **1**

## PROBLEMA 10 / 10

**punctaj: 10**

*Pe fiecare latură a unui patrulater convex se consideră n puncte (diferite de vârfuri). Se notează cu* $T_n$ *numărul triunghiurilor nedegenerate care se pot forma având vârfurile printre* *cele 4n puncte considerate.*

---

*a) Care este valoarea lui $T_1$?*

**Raspuns corect:** 4

punctaj: 2

*b) Determinați cea mai mică valoare a lui n pentru care $T_n > 2019$?*

**Raspuns corect:** 7

punctaj: 8

**Solutie:**

***a)*** $T_1 = 4$

***b)*** *Dintre cele* $4n$ *puncte putem selecta* $3$ *puncte diferite în* $\frac{4n(4n-1)(4n-2)}{6}$ *moduri. O parte dintre aceste triplete sunt vârfurile unui triunghi degenerat. Asta se întâmplă atunci când toate cele* $3$ *puncte se găsesc pe o aceeași latură a patrulaterului. Această alegere se poate face în* $4 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ *moduri.*

$$T_n = \frac{4n(4n-1)(4n-2)}{6} - \frac{4n(n-1)(n-2)}{6} =$$

$$= \frac{4n((16n^2-12n+2)-(n^2-3n+2))}{6} =$$

$$= \frac{4n(15n^2-9n)}{6} = 2n(5n^2-3n) = 2n^2(5n-3)$$

*Pentru* $n \geq 7 \Rightarrow 2n^2(5n-3) > 2 \cdot 49 \cdot 32 > 2019$

*Pentru* $n = 6$ *se obține* $T_6 = 1944$

***Răspuns:***
***a)*** **4**
***b)*** **7**

---

**Total puncte:** 100